Analyse I

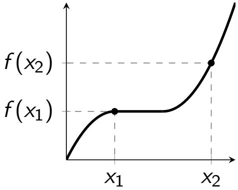
SIE / GC / SC

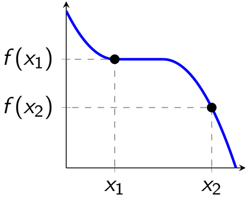
Etudes de fonctions

Sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle. Alors f est

- **croissante** sur I si $\forall x_1 < x_2 \in I, f(x_1) \leq f(x_2)$
- **décroissante** $\geq$





$$\text{Si } f \in \mathcal{D}^1(I), \quad \begin{array}{ccc} f \text{ est croissante sur } I & \Leftrightarrow & f'(x) \geq 0 \text{ sur } I \\ f \text{ est décroissante sur } I & \Leftrightarrow & f'(x) \leq 0 \text{ sur } I \end{array}$$

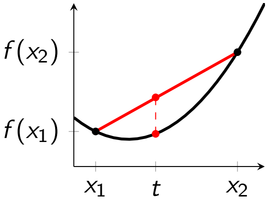
Sur un intervalle

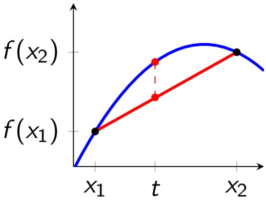
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle. Alors f est

- **convexe** sur I si $\forall x_1 < x_2 \in I, \forall \lambda \in [0,1]$,

$$f\Big(\underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{t}\Big) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

- **concave** $\geq$





	Si $f \in \mathcal{D}^1(I)$	Si $f \in \mathcal{D}^2(I)$
f est convexe sur I	$\Leftrightarrow f'$ est croissante sur I	$\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ sur I $\overset{++}{\smile}$
f est concave sur I	$\Leftrightarrow f'$ est décr. sur I	$\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ sur I $\overset{--}{\frown}$

EPFL

En un point x_0

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction, (où I est un intervalle.) Alors

- f admet un $\begin{matrix}\textbf{maximum}\\ \textbf{minimum}\end{matrix}$ **local** en $x_0 \in I$ si $\begin{matrix} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x)\end{matrix}$ pour tout $x \in I$ et dans un voisinage de x_0.

- f admet un $\begin{matrix}\textbf{maximum}\\ \textbf{minimum}\end{matrix}$ **global** en $x_0 \in I$ si $\begin{matrix} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x)\end{matrix}$ pour tout $x \in I$.

  Dans ce cas, $\begin{matrix} f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x) \\ f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x). \end{matrix}$

- un **extremum** de f est un min ou un max de f.

- f admet un **point stationnaire** en $x_0 \in I$ si $f'(x_0) = 0$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle.

En x_0, f admet:		Si f' existe sur I et est continue en x_0		Si f'' existe sur I et est continue en x_0
un max local	$\Leftrightarrow$	$f'(x_0) = 0$ et		
		f' *décroît* au vois. de x_0	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \leq 0$ au vois. de x_0
		$+ \quad 0 \quad -$		$\Leftarrow$ $f''(x_0) < 0$.
un min local	$\Leftrightarrow$	$f'(x_0) = 0$ et		
		f' *croît* au vois. de x_0	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \geq 0$ au vois. de x_0
		$- \quad 0 \quad +$		$\Leftarrow$ $f''(x_0) > 0$.
un point d'inflexion $\Leftrightarrow$ f change de convexité en x_0	$\Leftrightarrow$	f' a un max local ou min local en x_0	$\Leftrightarrow$	$f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0.

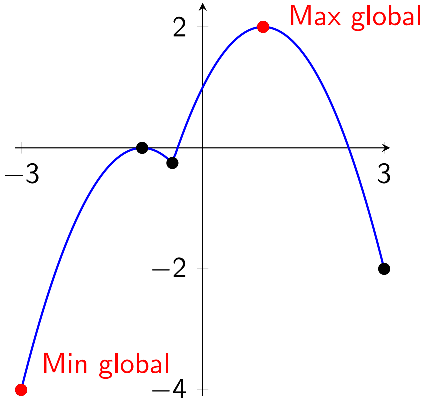
EPFL

Recherche d'extrema globaux

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f admet un extremum (global) en x_0, alors

1. $x_0 \in \{a, b\}$ (x_0 est un point de bord), **ou**
2. $x_0 \in]a, b[$ et $f'(x_0)$ n'existe pas, **ou**
3. $x_0 \in]a, b[$ et $f'(x_0) = 0$ (x_0 est un point stationnaire).

Exemple: $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = |2x+1| - x^2$



1. Bords: $\{-3, 3\}$. Points: $(-3, -4)$ et $(3, -2)$.
2. $f'(-\frac{1}{2})$ n'existe pas. Point: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.
3. $f'(-1) = 0$ et $f'(1) = 0$. Points: $(-1, 0)$ et $(1, 2)$.