Analyse I

SIE / GC / SC

Rappel sur les ensembles et les fonctions

EPFL

Ensembles = collections d'objets (mathématiques).

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ = ensemble des entiers pairs positifs.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ = ensemble des **entiers naturels**.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ = ensemble des **entiers relatifs**.
- *Revus plus tard:* $\mathbb{Q}$ = **nombres rationnels**, $\mathbb{R}$ = **nombres réels**, $\mathbb{C}$ = **nombres complexes**.
- *Revus plus tard:* **Intervalles**:
  - $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$
    = ensemble des nombres réels compris entre 2 et 5 (inclus)
  - $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$.

Ensembles: Notations

$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{2, 4, 6, \dots\}$

	Signification	Exemples
$\varnothing$	**ensemble vide**	$\varnothing = \{\}$
$x \in E$	x **est élément de** E	$2 \in A, \quad -1 \in \mathbb{Z}, \quad -4 \notin B$
$D \subset E$, $D \subseteq E$	D **est sous-ensemble de** E	$A \subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \not\subseteq B$
$D \cup E$	$= \{x \mid x \in D \text{ ou } x \in E\}$ D **union** E	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, \dots\}$
$D \cap E$	$= \{x \mid x \in D \text{ et } x \in E\}$ D **intersection** E	$A \cap B = \{2\}$
$E \setminus D$, $E - D$	$= \{x \in E \mid x \notin D\}$ E **privé de** D	$A \setminus B = \{1, 3\}$ $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$

Ensembles: Produit cartésien

Pour deux ensembles A et B, le **produit cartésien** de A et B est

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

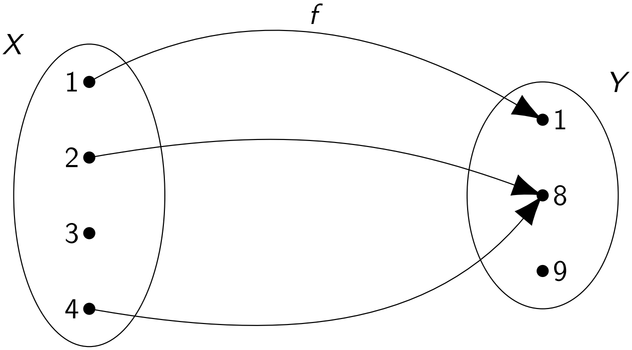
C'est l'ensemble des **paires/couples** (x, y).

- Si $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$, alors

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

- Attention: $(x, y) \neq (y, x)$. Donc $(3, 1) \notin A \times B$.
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

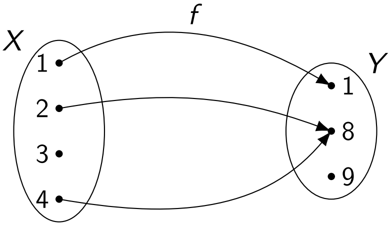
Fonctions = manières d'assigner des éléments $y \in Y$ à des $x \in X$.



Attention: Pas plus d'une flèche partant du même x.

Fonctions

$\mathrm{D}(f) = \{1, 2, 4\}$



$\mathrm{Im}(f) = \{1, 8\}$

$f(1) = 1, \quad f(2) = 8, \quad f(4) = 8$

- Si $x \mapsto y$, on note $y = f(x)$; on dit que y est l'**image** de x via f.
- Le **domaine** $\mathrm{D}(f) \subseteq X$ est

  $$\mathrm{D}(f) = \{x \in X \mid \text{une flèche part de } x\} = \{x \in X \mid f(x) \text{ est défini}\}.$$

- L'**ensemble image** $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$ est

  $$\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y \mid \text{une flèche arrive vers } y\} = \{f(x) \mid x \in \mathrm{D}(f)\}.$$

Fonctions: Notations

Notation	Signification
$f\colon A \to B$ ou $\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$	$\mathrm{D}(f) = A$ et $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$
Fonction **réelle**	$f\colon A \to B$ avec $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$
$f(x) = \dots (\mathit{formule}) \dots$	$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \dots (\mathit{formule}) \dots \end{aligned}$ où l'ensemble $D = \mathrm{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$ **est le plus grand possible.**

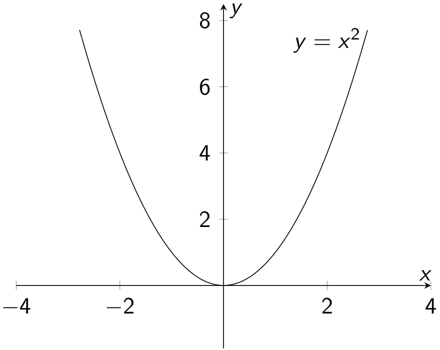
Exemples:

- $f(x) = x + 1$ veut dire $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$
- $g(x) = \frac{1}{x}$ veut dire $\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}. \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$

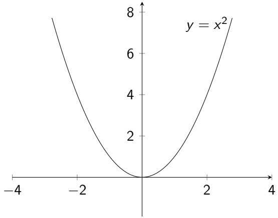
Fonctions: Graphes

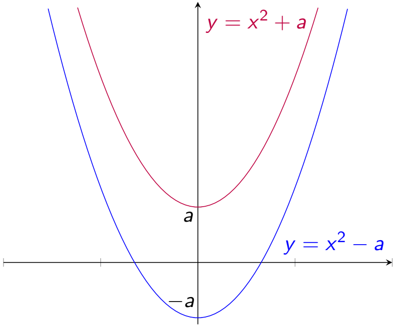
Le **graphe** d'une fonction réelle f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donné par

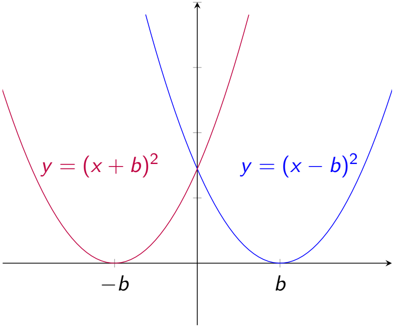
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f),\ y = f(x)\}.$$



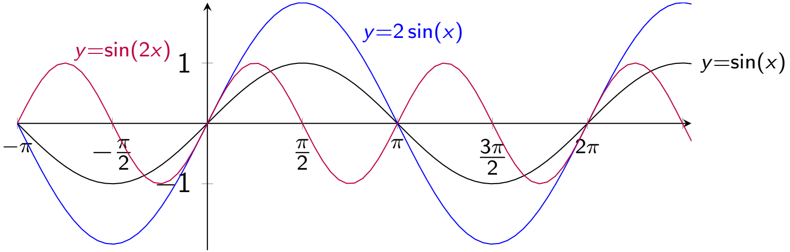
Fonctions: Graphes







Fonctions: Graphes



Fonctions à connaître

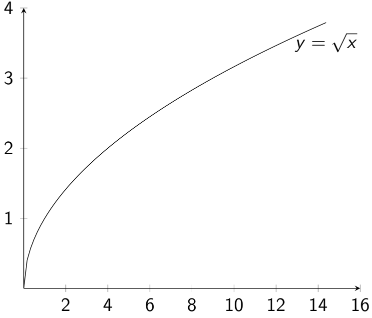
- **Polynômes:** $f(x) = \color{blue}{a_n} x^{\color{purple}{n}} + \color{blue}{a_{n-1}} x^{n-1} + \cdots + \color{blue}{a_1} x + \color{blue}{a_0}$

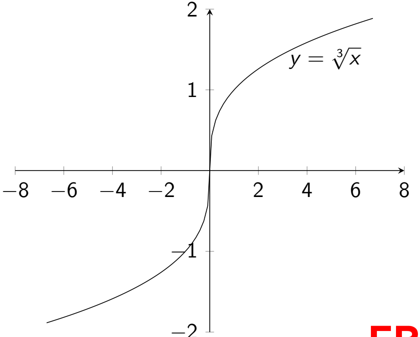
  degré

  coefficients

  Ex: $f(x) = x^3 + 2x - 1$. $n = 3$, $a_3 = 1$, $\boxed{a_2 = 0}$, $a_1 = 2$, $a_0 = -1$.

- **Racines:** $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$, $\quad f(x) = \sqrt[n]{x}$, pour $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$





Fonctions à connaître: Exp et Log

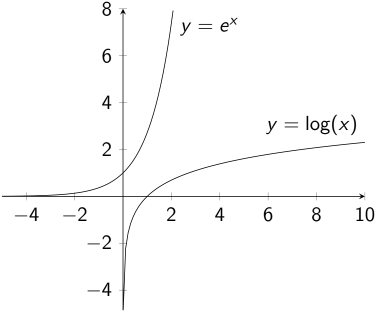
Pour chaque **base** $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[\quad (a > 0$ et $a \neq 1)$:

- **Exponentielles:** $f(x) = \exp_a(x) = a^x$.
- **Logarithmes:** $f(x) = \log_a(x)$. Défini via:

$$\log_a(x) = y \quad \text{si et seulement si} \quad x = a^y$$

Si la base $a = e = 2,718... =$ **nombre d'Euler**, on note

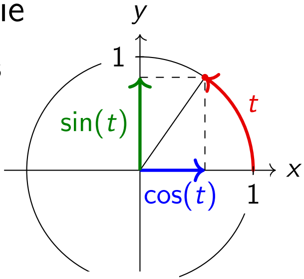
$$\log_e(x) = \ln(x) = \log(x).$$



$$\mathrm{D}(\exp_a) = \mathbb{R}$$
$$\mathrm{Im}(\exp_a) =]0,+\infty[$$

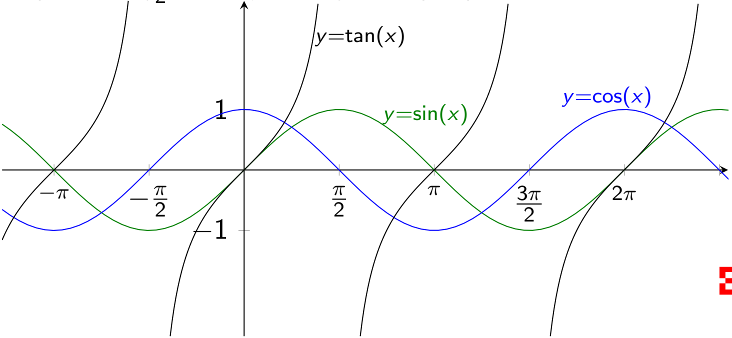
$$\mathrm{D}(\log_a) =]0,+\infty[$$
$$\mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$$

Fonctions à connaître: Trigonométrie



- Le **sinus** $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le **cosinus** $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définis via: $\longrightarrow$
  La **tangente** est définie comme
  $$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

$$\mathrm{D}(\sin) = \mathrm{D}(\cos) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(\sin) = \mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1].$$
$$\mathrm{D}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \mathrm{Im}(\tan) = \mathbb{R}.$$



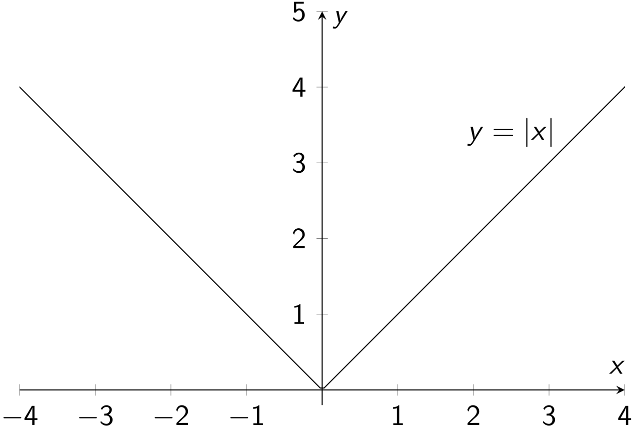
EPFL

Fonctions à connaître: Valeur absolue

La **valeur absolue** d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

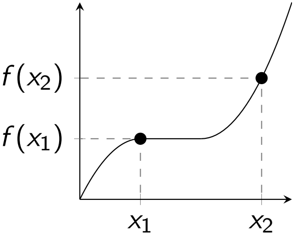
(Voir Série 1 pour les propriétés de cette fonction).

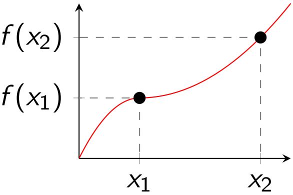


Fonctions: Croissance

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si pour tous $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$, on a

- $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $<$) alors f est **croissante** (resp. **strictement croissante**)

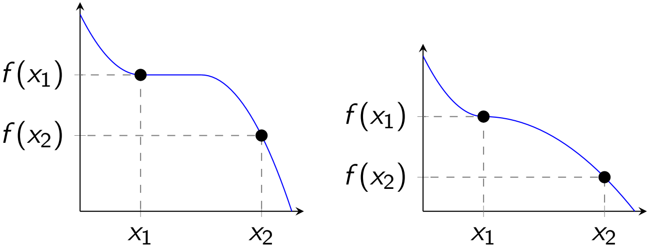




Fonctions: Croissance

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si pour tous $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$, on a

-
$f(x_1) \leq f(x_2)$		**croissante**
$<$	alors f est	**strictement croissante**
$\geq$		**décroissante**
$>$		**strict. décroissante**



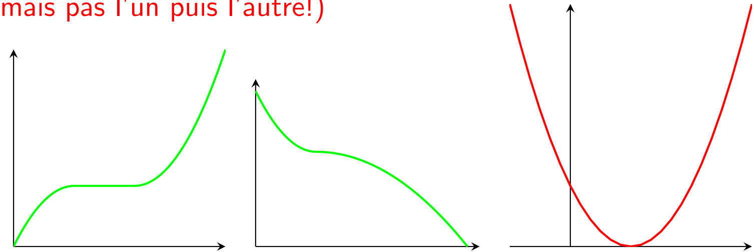
Fonctions: Croissance

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si pour tous $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$, on a

- $f(x_1) \leq f(x_2)$ / $<$ / $\geq$ / $>$ alors f est **croissante** / **strictement croissante** / **décroissante** / **strict. décroissante**

$f(x_1) \leq f(x_2)$		**croissante**
$<$	alors f est	**strictement croissante**
$\geq$		**décroissante**
$>$		**strict. décroissante**

- f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante (mais pas l'un puis l'autre!)

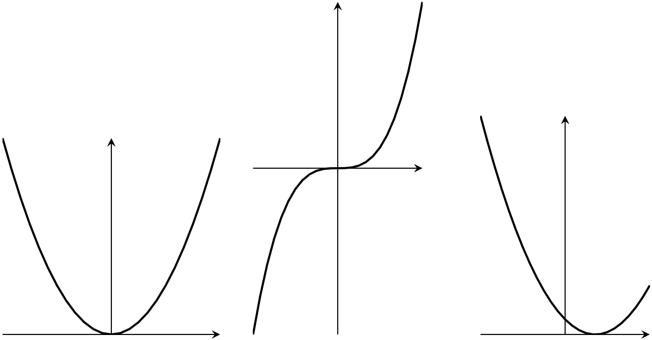


EPFL

Fonctions: Autres propriétés

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.
  f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$.

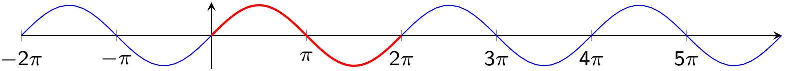


paire | impaire | ni paire ni impaire

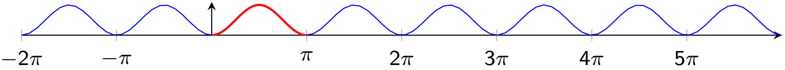
Fonctions: Autres propriétés

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $T > 0$.

- f est T-**périodique** si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in D$.
- La **période fondamentale** est le plus petit $T > 0$ tel que f soit T-périodique.



$\sin(x)$ est 2π-périodique; c'est sa période fondamentale.



$\sin^2(x)$ est aussi 2π-périodique; mais sa période fondamentale est π