Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Notes de cours

Analyse I

Olivier Mila

Version provisoire du 11 décembre 2025
Toutes informations non-garanties

Automne 2025

Table des matières

Chapitre 0: Prélude

Sem. 1

0.1 Rappels sur les ensembles et les fonctions

Voir slides du premier cours.

0.2 Surjectivité et Injectivité

Définition. Une fonction $f\colon X \to Y$ est

- **surjective** si $\operatorname{Im}(f) = Y$ *(Tout $y \in Y$ est l'image d'au moins un $x \in X$)*,
- **injective** si pour tous $x_1, x_2 \in X$, on a $f(x_1) = f(x_2) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{implique}} x_1 = x_2$, ou de manière équivalente, si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
  (Tout $y \in Y$ est l'image d'au plus un $x \in X$),
- **bijective** si elle est injective et surjective
  (Tout $y \in Y$ est l'image d'exactement un $x \in X$).

Si $f\colon X \to Y$ est bijective (et seulement dans ce cas !), on peut l'"inverser":

Définition. Si $f\colon X \to Y$ est bijective, sa **fonction réciproque** est

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon Y &\to X \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \text{unique } x \in X \text{ tel que } f(x) = y. \end{aligned}$$

Exemples:

(i) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$ est bijective de réciproque $f^{-1}(x) = x - 1$.

(ii) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$. Pas surjective: $-3 \notin \operatorname{Im}(f)$. Pour la rendre surjective, on considère sa **corestriction** à $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty[$. La fonction $g = f|^{\mathbb{R}_{\geq 0}}\colon \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ est surjective, mais pas injective: $g(2) = 4 = g(-2)$. Pour la rendre injective, on considère sa **restriction** à $\mathbb{R}_{\geq 0}$. La fonction $h = g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}\colon \begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ est bijective, de réciproque $h^{-1}\colon \begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$.

Théorème 1. *Toute fonction strictement monotone est injective.*

Preuve. On suppose f strictement croissante (le cas f décroissante est similaire). Si $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$. Dans le premier cas, $f(x_1) < f(x_2)$ et dans le second $f(x_2) < f(x_1)$. Donc, dans les deux cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$. $\square$

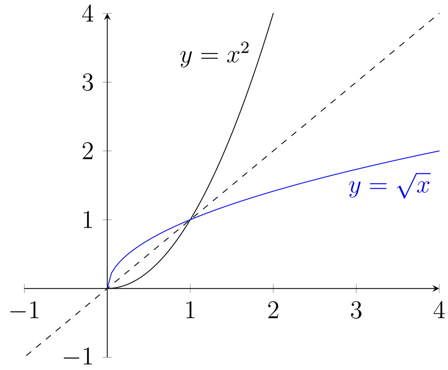
Définition. La **composée** (ou **composition**) de deux fonctions $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ est la fonction

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\to C \\ a &\mapsto g \circ f(a) = g(f(a)). \end{aligned}$$

Ex: $\sin(x^2) = g \circ f(x) = g(f(x))$ avec $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x). \end{aligned}$

Théorème 2. *Une fonction $f\colon A \to B$ est bijective $\overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{si et seulement si}}$ il existe une fonction $g\colon B \to A$ telle que $g \circ f(x) = x$ et $f \circ g(x) = x$ (g est alors la réciproque de f)*

Si f est bijective, on a $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$; le graphe de f^{-1} s'obtient donc en échangeant les axes x et y dans le graphe de f, ce qui revient à faire une symétrie en la droite $y = x$. Voir exemple ci-contre.

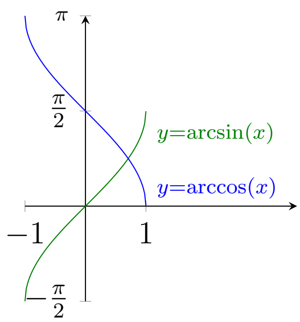


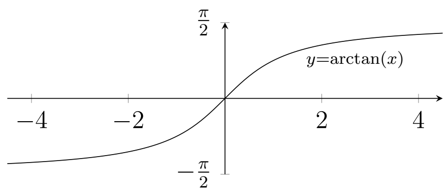
0.3 Réciproques des fonctions de base

(i) *Polynômes:* Soit $f\colon \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^n.\end{array}$ Si n est *impair*, f est bijective, et si n est *pair*, on doit co/restreindre à $h = f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}$. Dans les deux cas la réciproque est notée $\sqrt[n]{x}$. Si $x \geq 0$, on peut utiliser la notation $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

(ii) *Exponentielles:* Pour $a > 0, a \neq 1$, soit $f = \exp_a : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \exp_a(x) = a^x\end{array}$. Son image est $\mathbb{R}_{>0} =]0, +\infty[$, et la corestriction $f|^{\mathbb{R}_{>0}}$ est bijective ; Sa réciproque est $\log_a(x)$.

(iii) *Fonctions trigonométriques* Les fonctions $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont d'image $[-1, 1]$, et ne sont pas injectives ; on doit les restreindre à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour sin et $[0, \pi]$ pour cos. Les co/restrictions $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{[-1,1]}$ et $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$ sont bijectives, de réciproques $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$, respectivement.
La fonction $\tan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective, et sa restriction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est bijective, de réciproque $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.





Chapitre 1: Nombres

1.1 Entiers et nombres rationnels

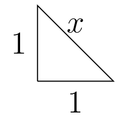
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = nombres/entiers naturels. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$ = entiers relatifs.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ = nombres rationnels. (Peut être identifié à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ via "$\frac{a}{b} = (a, b)$", mais où l'on déclare $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$)

Malgré la quantité impressionnante de nombres dans $\mathbb{Q}$, on a malheureusement:

Proposition 1.1. *L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{Q}$.*

Preuve. Par l'absurde. Supposons qu'il existe une solution $x = \frac{a}{b}$; on peut supposer la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible. Alors $x^2 = 2 \Rightarrow (\frac{a}{b})^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ est pair. Si a était impair, on aurait $a = 2k + 1$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, et donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1$ serait aussi impair. Donc a est forcément pair $\Rightarrow a = 2c$. Il suit $a^2 = (2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair (cf même argument que pour a). Donc a et b sont pairs, et on a $\frac{a}{b} = \frac{2c}{2d}$, ce qui est absurde! (On avait supposé que $\frac{a}{b}$ était irréductible). Il ne peut donc exister de tel $x \in \mathbb{Q}$. □

Remarque 1.1. Cela dit, en observant le triangle ci-contre, on s'aperçoit que le côté x est tel que $x^2 = 2$! Il nous manque donc des nombres...



1.2 Construction des nombres réels

On utilise la relation d'ordre $x \leq y$ sur $\mathbb{Q}$ pour "ajouter" des nombres aux bons endroits.

Définition 1.1. Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{Q}$ (plus tard: de $\mathbb{R}$).

- Un $\begin{array}{l}\textbf{majorant}\\ \textbf{minorant}\end{array}$ de l'ensemble A est un nombre x tel que $\begin{array}{l}x \geq a\\ x \leq a\end{array}$ pour tout $a \in A$.
- S'il existe un $\begin{array}{l}\text{majorant}\\ \text{minorant}\end{array}$ x de A tel que $x \in A$, alors x s'appelle le $\begin{array}{l}\textbf{maximum}\\ \textbf{minimum}\end{array}$ de A.
- L'ensemble A est $\begin{array}{l}\textbf{majoré}\\ \textbf{minoré}\\ \textbf{borné}\end{array}$ s'il admet $\begin{array}{l}\text{un majorant}\\ \text{un minorant}\\ \text{les deux}\end{array}$.

Exemples:

- Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, alors A admet $\mathbf{1}, 2, \frac{3}{2}, \dots$ comme majorants et $\mathbf{0}, -3, -\frac{1}{2}$ comme minorants. Il est donc borné, et on a $\max A = 1$ et $\min A = 0$.
- $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ admet les mêmes majorants et minorants que A, et est donc borné, mais $\max B$ et $\min B$ n'existent pas.
- $C = \mathbb{N}$ possède 0 comme minorant, mais pas de majorants. Il n'est donc pas majoré (et pas borné). $\max C$ n'existe pas, et $\min C = 0$.

Moralement, B devrait avoir comme "maximum" 1 et "minimum" 0. Cela motive:

Définition 1.2. Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{Q}$ (plus tard: de $\mathbb{R}$).

- Le **suprémum** de A est $\sup A = \min(\{x \mid x \text{ est un majorant de } A\})$.
  C'est le plus petit des majorants.

- L'**infimum** de A est $\inf A = \max(\{x \mid x \text{ est un minorant de } A\})$.
  C'est le plus grand des minorants.

Remarque 1.2. Si A n'est pas $\begin{matrix}\text{majoré} \\ \text{minoré}\end{matrix}$, on pose $\begin{matrix}\sup A = +\infty \\ \inf A = -\infty\end{matrix}$. (Attention: $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, ce sont des symboles). De plus, si $\begin{matrix}\max A \\ \min A\end{matrix}$ existe, alors $\begin{matrix}\sup A = \max A \\ \inf A = \min A\end{matrix}$.

Reprenons les exemples précédents:

- $\sup A = \max A = 1$, et $\inf A = \min A = 0$.
- $\sup B = 1$ même si $\max B$ n'existe pas, et $\inf B = 0$ même si $\min B$ n'existe pas.
- $\inf C = \min C = 0$ et $\sup C = +\infty$ (il n'y a pas de majorant).

Remarque 1.3. Pour un ensemble borné, si min, max peuvent ne pas exister, on s'attend à ce que inf et sup existent toujours.

Contre-exemple fondamental: $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. L'ensemble D est borné (majoré par $\frac{3}{2}$ et minoré par $-\frac{3}{2}$), mais:

Proposition 1.2. *Si $x = \sup D$ existe, alors $x^2 = 2$.*

Preuve. 1) Supposons par l'absurde que $x^2 < 2$. On choisit un entier $n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$ et on pose $d = x + \frac{1}{n}$. Alors $d \in D$: en effet, $d \in \mathbb{Q}$ et $d^2 = (x + \frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2$ (puisque $x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{n} \leq 2 - x^2 \Leftrightarrow n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$). Donc $d \in D$ et $d = x + \frac{1}{n} > x$. C'est absurde, car x est un majorant de D.
2) Supposons par l'absurde que $x^2 > 2$. Alors ... (exercice difficile !) ... Absurde !
3) Comme on n'a ni $x^2 < 2$, ni $x^2 > 2$, on a $x^2 = 2$. □

Corollaire 1.3. *Le nombre $x = \sup D$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.*

Preuve. Il n'y a pas de $x \in \mathbb{Q}$ avec $x^2 = 2$, cf Prop. 1.1. □

Cette procédure nous indique où ajouter des nombres !
Construction des nombres réels: $\mathbb{R}$ s'obtient à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant les sup et les inf de tous les sous-ensembles bornés $A \subseteq \mathbb{Q}$. (Voir règle de coupure de Dedekind).

1.3 Propriétés des nombres réels

(i) $\mathbb{R}$ est un **corps** (on a $0, 1, +, \cdot$, inverses, distributivité,...) muni d'un **ordre total** ($x \leq y$).

(ii) Les définitions de majoré, minoré, max, min, suprémum, infimum restent les mêmes que pour $\mathbb{Q}$ (remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ dans les définitions).

(iii) La procédure de la construction de $\mathbb{R}$ a réussi. En effet, on a:

Théorème 1.4. *Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide et $\begin{matrix}\text{majoré} \\ \text{minoré}\end{matrix}$, $\begin{matrix}\sup A \\ \inf A\end{matrix}$ existe toujours $\in \mathbb{R}$ et est unique.*

En fait, si $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$, alors $\sup D$ et $\inf D$ existent, et sont solutions
Sem. 2 de $x^2 = 2$. Donc $\sup D = \sqrt{2}$ et $\inf D = -\sqrt{2}$.

(iv) Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné, $\begin{matrix}\max A \\ \min A\end{matrix}$ existe si et seulement si $\begin{matrix}\sup A \in A \\ \inf A \in A\end{matrix}$ et dans ce cas, $\begin{matrix}\max A = \sup A \\ \min A = \inf A\end{matrix}$.

Exemples:

1) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. A est majoré par 1 et minoré par 0, donc borné. Comme $1 \in A$, on a $\sup A = \max A = 1$. Soit $x > 0$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{x}$. Alors $\frac{1}{n} < x$, et comme $\frac{1}{n} \in A$, x n'est pas un minorant. Cela montre que 0 est le plus grand minorant, d'où $\inf A = 0$. Comme $0 \notin A$, $\min A$ n'existe pas.
2) **Intervalles**:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$		
$]a,b[=$	$<$	$<$
$[a,b[=$	$\leq$	$<$
$]a,b] =$	$<$	$\leq$
bornés, $\inf = a$, $\sup = b$		

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$		$\inf = a$
$]a,+\infty[=$	$<$	$\sup = +\infty$
$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$		$\inf = -\infty$
$]-\infty,b[=$	$<$	$\sup = b$
non-bornés		

1.4 Représentation décimale

Tout $x \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$x = \pm \underbrace{d_1 d_2 \dots d_n}_{\substack{\text{décimales avant la virgule,}\\ \text{en nombre fini}}} \underbrace{.}_{\text{ou ,}} \underbrace{d_{n+1} d_{n+2} \dots}_{\substack{\text{décimales après la virgule,}\\ \text{en nombre fini ou infini}}} \qquad \text{avec } d_i \in \{0,1,\dots,9\}.$$

Exemple: Représentation finie: $1 = 1.0 = 1.000\dots$, $\frac{3}{2} = 1.5$, $\frac{110}{8} = 13.75$. Représentation périodique: $\frac{5}{7} = 0.\overline{714285} = 0.7142857142857\dots$. Mais: $\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$ semble ne pas se répéter...

Théorème 1.5. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ a une représentation décimale finie ou périodique.*

Idée de preuve. $\boxed{\Rightarrow}$ Vu en classe. $\boxed{\Leftarrow}$ Exemple représentation finie: $x = 3.745 = \frac{3745}{1000}$. Ex. repré. périodique: $x = 41.70\overline{102} \Rightarrow 10^2 x = 4170.\overline{102} \Rightarrow 10^2 10^3 \cdot x = 4170102.\overline{102}$. Donc $10^2 10^3 x - 10^2 x = 4170102 - 4170 = y \in \mathbb{Z}$, d'où $x = \frac{y}{10^2(10^3-1)} \in \mathbb{Q}$. □

Remarque 1.4. Avec la même idée, on montre que $0.\overline{9} = 1$.

Conséquences du théorème:

- La représentation décimale de $\sqrt{2}$ est infinie non-périodique.
- $x = 0,1\,01\,001\,0001\,00001\ \dots \notin \mathbb{Q}$.
- **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$** : Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $x < a < y$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists a \in \mathbb{Q}$ arbitrairement proche de x. Ex: $x = \sqrt{2} = 1.414235\dots \Rightarrow 1; 1.4; 1.41; 1.414; \dots$ sont $\in \mathbb{Q}$ et s'approchent de $\sqrt{2}$.

Autres propriétés des nombres (réels):

(i) Récapitulatif: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Les nombres **irrationnels** sont: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(ii) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est **dénombrable**: on peut lister ses éléments. (Mathématiquement, dénombrable veut dire qu'il existe une fonction bijective $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$).
(iii) L'ensemble $\mathbb{R}$ est **indénombrable** ($\Leftrightarrow$ il n'existe pas de liste de $\mathbb{R}$).

1.5 Nombres complexes

Construction: On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$:

1) D'une addition: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$. Interprétation géométrique: c'est l'addition des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
2) D'une multiplication: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$. Interprétation géométrique: plus tard ! Ex: $(1,2) \cdot (3,4) = (-5, 10)$.

Notations:

(i) $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ et $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$. Cela fait donc sens d'**identifier $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ avec $\mathbb{R}$ (via $(x, 0) \leftrightarrow x$)**. On a donc $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b \cdot (0, 1)$.

(ii) Le "nombre" $(0, 1)$ est intéressant: on a $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. On l'appelle **l'unité imaginaire** $i = (0, 1)$. Ainsi i est solution de $x^2 = -1$, et on peut écrire $(a, b) = a + b(0, 1) = a + bi$.

Définition 1.3. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ et des notations (i) et (ii) est le **corps des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$.

Remarque 1.5.
- Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. C'est la **forme cartésienne** de z.
- On peut "oublier" la définition compliquée de $\cdot$, et retenir seulement $i^2 = -1$. En effet: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$; on retrouve la multiplication définie plus haut.

Représentation graphique: Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on renomme l'axe horizontal "axe réel $\mathbb{R}$" et l'axe vertical "axe imaginaire" $i\mathbb{R}$. Les nombres complexes sont donc représentés comme des points de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.4. Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1) La **partie réelle** de z est $\mathrm{Re}(z) = a$. La **partie imaginaire** de z est $\mathrm{Im}(z) = b$.
2) Le **module** (ou valeur absolue) de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in [0, +\infty[$. C'est la distance entre z et 0 (comme pour $|x|$ dans $\mathbb{R}$).
3) L'**argument** de z est $\arg(z) =$ angle entre z et l'axe réel, mesuré $\in\ ]-\pi, \pi]$. Si $a > 0$, on a $\arg(z) = \arctan(b/a)$, et il existe des formules dans les autres cas.
4) Le **conjugué complexe** de z est $\bar{z} = a - bi$.

1.6 Propriétés des nombres complexes

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$.

(iii) $|z|^2 = z\bar{z}$. En effet, $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

(iv) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. En effet, $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$, et on obtient l'égalité voulue en prenant la racine.

(v) Si $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$. En effet, si $z' = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$, alors $zz' = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$.

Remarque 1.6. Pour s'en rappeler, on peut "multiplier" par $\bar{z}$ en haut et en bas. Exemple: $\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{2^2+3^3} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

(vi) Inégalité triangulaire: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Trois représentations des nombres complexes:

1) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$; c'est la **forme cartésienne**.
2) Si $r = |z|$, et $\theta = \arg(z)$, alors $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$. Donc tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$; c'est la **forme polaire**.
3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. (Justification plus tard !) Avec cette notation, tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$; c'est la **forme polaire-exponentielle**.

Remarque 1.7. Attention: Si $z = re^{i\theta}$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pm k2\pi$, pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.5 (Exponentielle complexe)**.** Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on définit

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Remarque 1.8. En forme cartésienne, les additions et soustractions sont faciles, mais les multiplications et divisions sont plus compliquées. En forme polaire-exp, c'est l'inverse: si $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = se^{i\varphi}$, alors $z_1 z_2 = (rs)e^{i(\theta+\varphi)}$ et $z_1/z_2 = (r/s)e^{i(\theta-\varphi)}$.

Exemples: Si $z = 1 + i$, alors $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, donc $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Si $z = e^{i\pi/3}$, alors $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Conséquences de l'exponentielle complexe:

- Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ (preuve en exercice). Donc si $z = re^{i\theta}$, on a $\bar{z} = re^{-i\theta}$.
- Interprétation géométrique de la multiplication complexe: Les modules se multiplient ($\Rightarrow$ agrandissement) et les arguments s'ajoutent ($\Rightarrow$ rotation). Ainsi $i \cdot z = z$ tourné d'un angle de $\pi/2$.
- Formule d'Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Donc $e^{i\pi} = -1$.
- Formule de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$: Cela suit du fait que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Formules: $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. En effet, $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$; ces formules suivent donc des formules pour $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ vues plus haut.

Remarque 1.9. Pour résumer, si $z = a + bi = re^{i\theta}$ et $\omega = c + di = se^{i\varphi}$, on a

$$z = \omega \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ et } b = d \quad \Leftrightarrow \quad r = s \text{ et } \theta = \varphi + k \cdot 2\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}.$$

1.7 Calculs dans $\mathbb{C}$

1) Calcul de $(1 - \sqrt{3}i)^{30}$. Très long si on doit développer ! Mieux: $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\pi/3}$ et donc $(1 - \sqrt{3}i)^{30} = 2^{30}e^{-i10\pi} = 2^{30}(-1)^{10} = 2^{30}$.
2) Équation $z^n = 1$. On pose $z = r \cdot e^{i\theta}$ pour trouver $z^n = 1 \Leftrightarrow r^n \cdot e^{in\theta} = 1 \cdot e^{i0}$. Donc $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$ car $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $n\theta = 0 + k2\pi \Rightarrow \theta = \frac{k2\pi}{n}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions sont donc $\{1 \cdot e^{ik2\pi/n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Comme $(e^{ik2\pi/n})^n = 1$, il y a en fait $\boldsymbol{n}$ **solutions distinctes**: $\{1, e^{i2\pi/n}, e^{i4\pi/n}, \ldots, e^{i2\pi(n-1)/n}\}$.
   Exemples:
   - $z^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1, e^{i2\pi/2}\} = \{1, -1\}$.
   - $z^3 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\} = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$. Ces solutions forment un triangle équilatéral.
   - **Sem. 3** $z^6 = 1$ possède 6 solutions qui forment un hexagone régulier.
3) Équation $z^n = \omega$.
   Étape 1: Trouver une solution z_0 (par exemple, si $\omega = se^{i\varphi}$, $z_0 = \sqrt[n]{s}e^{i\varphi/n}$).
   Étape 2: On a $z^n = \omega = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, e^{i2\pi/n}, e^{i4\pi/n}, \ldots, e^{i2\pi(n-1)/n}\}$.
   On trouve donc à nouveau $\boldsymbol{n}$ **solutions distinctes**:
   $$\{z_0, z_0e^{i2\pi/n}, z_0e^{i4\pi/n}, \ldots, z_0e^{i2\pi(n-1)/n}\}.$$
   Exemple:
   - $z^3 = i$. Étape 1: $z_0 = -i$ (ou $i = e^{i\pi/2} \Rightarrow z_0 = e^{i\pi/6}$). Étape 2: Les solutions sont $-i \cdot \{\text{solutions de } z^3 = 1\} = \{-i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\} = \{e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}\}$.

- $z^2 = 5 + 12i$. Étape 1: On a $5 + 12i = 13e^{i\arctan(12/5)}$, donc on peut prendre $z_0 = \sqrt{5}e^{i\arctan(12/5)/2}$, ce qui est difficile à simplifier. Mieux: en posant $z_0 = a + bi \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$. En combinant avec l'équation $|z_0|^2 = |5 + 12i| = 13$, on trouve le système:
$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 5 \\ 2ab &= 12 \\ a^2 + b^2 &= 13 \end{cases}$$
En sommant l'équation 1 et 3, on a $2a^2 = 18 \Rightarrow a = 3$, d'où $b = 2$ grâce à l'équation 2. Ainsi $z_0 = 3 + 2i$, et les solutions sont: $\{\pm(3 + 2i)\}$.

4) Factorisation de polynômes:

Théorème 1.6 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme*
$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad (\textit{avec } a_i \in \mathbb{C})$$
se factorise en
$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) \quad (\textit{les } z_i \textit{ sont les } \textbf{\textit{racines}} \textit{ de } P.)$$

Corollaire 1.7. *Toute équation polynômiale $P(z) = 0$ de degré n a n solutions complexes (en comptant les multiplicités).*

Exemple: Si $P(z) = az^2 + bz + c$, alors les solutions de $P(z) = 0$ sont $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, où l'on interprète $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ comme les deux solutions complexes de l'équation $u^2 = b^2 - 4ac$. Donc si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4ac \geq 0$, on a des solutions réelles, et si $b^2 - 4ac < 0$, on a $u^2 = b^2 - 4ac = i^2(4ac - b^2) \Rightarrow u = \pm i\sqrt{4ac - b^2}$.

Remarque 1.10. Si $P(z)$ est à coefficients réels (les $a_i \in \mathbb{R}$), alors les racines non-réeles viennent par paires conjuguées (exercice !). En les groupant, on trouve donc une factorisation réelle.

Exemple: $P(z) = z^4 + 1$. On résout $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$ comme avant. On trouve les 4 solutions $\{\frac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}\}$. On a donc une factorisation complexe et réelle:
$$z^4 + 1 = (z - \tfrac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \tfrac{1-i}{\sqrt{2}})(z - \tfrac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \tfrac{-1+-i}{\sqrt{2}}) = (z^2 - \sqrt{2}\,z + 1)(z^2 + \sqrt{2}\,z + 1).$$

Remarque 1.11. En développant, on trouve (si $a_n = 1$):
$$\begin{array}{ccccccc} & z^n & +a_{n-1}\,z^{n-1} & + \cdots + & a_0 & = (z - z_1)\cdot\cdots\cdot(z - z_n) \\ = & z^n & -(z_1 + \cdots + z_n)\,z^{n-1} & + \cdots + & (-1)^n z_1\cdots z_n & \end{array}$$
Ainsi la somme des 4 racines $\frac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$ vaut 0 et leur produit vaut 1.

Chapitre 2: Suites

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1. Une **suite de nombres réels** est une fonction $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto a(n) = a_n$.
Notation (au lieu de la notation de fonctions):

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\geq 0} = (a_n)_n = (a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Exemples:

1) **Suite arithmétique**: $a_n = bn + c$ ($n \in \mathbb{N}, b, c \in \mathbb{R}$):
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(a_0 = c,\quad a_1 = b + c,\quad a_2 = 2b + c,\quad 3b + c,\quad 4b + c,\quad 5b + c, \dots\big).$$
Exemples: $b = 2, c = 1 \Rightarrow a_n = 2n + 1$; $b = 1, c = 0 \Rightarrow a_n = n; b = 0 \Rightarrow (a_n) = (c, c, c, c, c, c, \dots)$ (suite constante).
2) **Suite harmonique**: $a_n = \dfrac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$):
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \Big(a_1 = 1,\quad a_2 = \frac{1}{2},\quad a_3 = \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},\quad \dots\Big).$$
3) **Suite géométrique**: $a_n = ar^n$ ($n \in \mathbb{N}, a, r \in \mathbb{R}$; le r est la **raison** de la suite):
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(a_0 = a,\quad a_1 = ar,\quad a_2 = ar^2,\quad a_3 = ar^3,\quad ar^4,\quad ar^5,\quad \dots\big).$$
Exemples: $a = 1, r = 2 \Rightarrow a_n = 2^n$ $(a_0 = 1, 2, 4, 8, 16, \dots)$; $a = 1, r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n}$ $(a_0 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$; $a = 1, r = -1 \Rightarrow a_n = (-1)^n$ $(a_0 = 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$.

Définition 2.2. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1) **majorée** (resp. **minorée**, **bornée**) si l'ensemble $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'est.
2) **croissante** / **strictement croissante** / **décroissante** / **strict. décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \geq a_n$. / $>$ / $\leq$ / $<$
3) (strictement) **monotone** si (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Exemples:

1) Suite arithmétique: $a_n = bn + c$. Si $b > 0$, (a_n) est strictement croissante, minorée par $c = a_0$ mais pas majorée: en effet, si $M \in \mathbb{R}$, alors $a_n > M$ dès que $n > \frac{M-c}{b}$.
2) Suite harmonique: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. La suite est donc bornée (majorée par 1, minorée par 0) et strictement décroissante ($a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$). Sem. 4
3) Suite géométrique: $a_n = ar^n$. Si $a > 0$, la suite est strictement croissante pour $r > 1$, strictement décroissante pour $0 < r < 1$, bornée pour $r \in [-1, 1]$, pas majorée pour $r > 1$.

Définition 2.3 (Suites définies par récurrence)**.** $a_0 =$ valeur fixée, $a_{n+1} = g(a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Ex: $a_0 = 0$, $g(x) = x + 1$. Donc $a_1 = g(a_0) = 0 + 1 = 1, a_2 = g(a_1) = 1 + 1 = 2, a_3 = 3$, $a_4 = 4$... **Affirmation:** $a_n = n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.
Pour démontrer ce genre de résultat, on utilise:

Définition 2.4 (Preuve par récurrence)**.** Si $P(n)$ est une proposition qui dépend d'un entier n, et si

1) *Initialisation:* $P(n_0)$ est vraie et

2) *Pas de récurrence:* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Preuve de l'affirmation. On montre $P(n) =$ "$a_n = n$" par récurrence sur $n \geq 0$.

1) *Initialisation:* $a_0 = 0$, donc $P(0)$ est vraie.
2) *Pas de récurrence:* On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} = g(a_n) &= a_n + 1 && \text{par définition} \\ &= n + 1 && \text{par l'hypothèse de récurrence } P(n). \end{aligned}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

On conclut donc que $P(n) =$ "$a_n = n$" est vraie pour tout $n \geq 0$. □

Fausses preuves par récurrence:

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = n + 7$. En effet, si $P(n) =$ "$n = n + 7$", alors on a $n + 1 \overset{P(n)}{=} (n + 7) + 1 = (n + 1) + 7$, et donc $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, et $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
   Faute: On a oublié l'initialisation: $P(0)$ est fausse, car $0 \neq 7$.
2) Tous les chats sont de la même couleur.

Définition 2.5 (Preuve par récurrence double)**.** Si $P(n)$ est une proposition qui dépend d'un entier n, et si

1) *Initialisation:* $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies,
2) *Pas de récurrence double:* $P(n)$ et $P(n+1)$ impliquent $P(n+2)$ pour tout $n \geq n_0$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque 2.1. Il existe aussi la récurrence triple, forte, inversée, ...

Retour aux exemples de suites définies par récurrence:

1) $a_0 = c, a_{n+1} = a_n + b \quad \Rightarrow \quad a_n = bn + c$. (Exercice)
2) $a_0 = a, a_{n+1} = a_n \cdot r \quad \Rightarrow \quad a_n = ar^n$. (Exercice)
3) $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. Attention: ce n'est techniquement pas une suite définie par récurrence au sens de la définition précédente, car la fonction $g(x) = x + 2n + 1$ dépend de n. On a $a_0 = 0, a_1 = a_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1, a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 3 = 4, a_3 = 4 + 5 = 9$.
   Affirmation: $a_n = n^2$.

   Preuve. Par récurrence sur $n \geq 0$.
   1) *Initialisation:* $a_0 = 0 = 0^2$.
   2) *Pas de récurrence:* $a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \overset{P(n)}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

   Donc $a_n = n^2$ pour tout $n \geq 0$. □

4) Suite de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Attention: pas non plus "définie par récurrence", car $f_{n+1} = g(f_{n+1}, f_n)$. On a $f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, 13, 21, 34, \ldots$.
   Prop: $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ où $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le *nombre d'or* et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Preuve par récurrence double. Voir exercices! □

2.2 Convergence et limites

Dans le cas d'une suite $a_n \geq 0$, par exemple $a_n = \frac{1}{n}$, elle converge vers 0 si elle devient et reste *arbitrairement petite ($\leq \varepsilon$)*, pourvu qu'on prenne n *assez grand* ($\geq N$).

Définition 2.6 (Convergence positive vers 0)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *positive*, i.e. telle que $a_n \geq 0$. Alors a_n **converge vers 0** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n \leq \varepsilon$.

Le cas général se déduit du cas particulier avec la distance (qui est une suite positive).

Définition 2.7 (Convergence générale)**.** Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si la suite (positive) des distances $d_n = \mathrm{dist}(a_n, \ell) = |a_n - \ell|$ converge vers 0. Dans ce cas, ℓ est la **limite** de la suite. Si (a_n) ne converge vers aucun $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite **diverge**. Notation: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell, a_n \longrightarrow \ell,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Remarque 2.2. De manière équivalente, $a_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exemples:

1) Soit $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors $a_n \longrightarrow 0$ (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.)

   Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On pose $N = N_\varepsilon =$ n'importe quel entier $\geq \frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Dès que $n \geq N$, on a alors:
   $$\mathrm{dist}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon,$$
   Comme ε était arbitraire, on a montré:
   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \text{ on a } |a_n - 0| \leq \varepsilon. \quad \text{D'où } a_n \longrightarrow 0. \qquad \square$$

2) Soit $a_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors (a_n) diverge.
   Preuve. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On pose $\varepsilon = 0.9$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, la distance $d_n = |a_n - \ell|$ est forcément $> \varepsilon$ pour un n sur deux: si $\ell \geq 0$, $|a_n - a| \geq 1 > \varepsilon$ dès que $n \geq N$ est impair, et si $\ell \leq 0$, $|a_n - \ell| \geq 1 > \varepsilon$ dès que $n \geq N$ est pair. Ainsi, $|a_n - \ell|$ ne s'approche pas de 0, quelque soit $\ell \in \mathbb{R}$. $\square$

3) Soit $a_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors (a_n) diverge.
   Preuve. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On choisit $\varepsilon = 1$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a, dès que $n \geq \max(N, \ell + 2)$, $|a_n - \ell| = |n - \ell| \geq 2 > 1 = \varepsilon$, donc a_n reste loin de ℓ. $\square$

4) Soit $a_n = c$ (suite constante). Alors $a_n \longrightarrow c$.
   Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N_\varepsilon = 0$. Pour $n \geq N_\varepsilon$, on a $|a_n - c| = |c - c| = 0 \leq \varepsilon$. $\square$

Proposition 2.1 (Premières propriétés)**.**

1) Si (a_n) converge, sa limite est unique.
2) Si (a_n) converge, alors (a_n) est bornée.

Preuve. 1) Supposons que (a_n) converge vers a et vers b. Si $a \neq b$, alors $\mathrm{dist}(a, b) > 0$ et on peut poser $\varepsilon = \frac{\mathrm{dist}(a,b)}{10} > 0$. On a alors
$$\mathrm{dist}(a, b) \leq \underbrace{\mathrm{dist}(a, a_n)}_{\leq \varepsilon \text{ si } n \geq N_\varepsilon} + \underbrace{\mathrm{dist}(a_n, b)}_{\leq \varepsilon \text{ si } n \geq N_\varepsilon} \leq \frac{\mathrm{dist}(a, b)}{5} < \mathrm{dist}(a, b).$$
ce qui est impossible. Cela force $\mathrm{dist}(a, b) = 0$, et donc $a = b$.

2) Idée de la preuve vue en classe. □

Remarque 2.3. L'autre direction est fausse: $a_n = (-1)^n$ est bornée, mais diverge.

Proposition 2.2 (Caractérisation des sup/inf avec suites)**.** *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide borné et $x \in \mathbb{R}$ un $\begin{array}{c}\textit{majorant}\\ \textit{minorant}\end{array}$ de A. Alors $\begin{array}{c} x = \sup A \\ x = \inf A\end{array}$ $\Leftrightarrow$ il existe une suite $(a_n) \subseteq A$ qui converge vers x.*

Preuve. Exercice. □

2.3 Propriétés des limites

Proposition 2.3 (Propriétés algébriques des limites)**.** *Si (a_n) et (b_n) sont deux suites convergentes, alors:*

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ *si* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

4) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{p/q} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{p/q}$ *si $a_n \geq 0$, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.*

Preuve. On montre 1), le reste est laissé en exercice. Posons $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, et $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \varepsilon/2 \text{ si } n \geq N^a_{\varepsilon/2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \varepsilon/2 \text{ si } n \geq N^b_{\varepsilon/2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, dès que $n \geq N_\varepsilon = \max(N^a_{\varepsilon/2}, N^b_{\varepsilon/2})$, on a $\mathrm{dist}(a_n + b_n, a+b) \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cela montre que $a_n + b_n \longrightarrow a + b$. □

Exemples:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+3/n)}{n(3-5/n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2+3/n}{\lim_{n\to\infty} 3-5/n} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$. Attention: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-5} \neq \frac{\lim_{n\to\infty} 2n+3}{\lim_{n\to\infty} 3n-5}$ car ces limites n'existent pas.

2) Fausse preuve que $1 = 2$ (vu en classe).

3) Les suites arithmétiques $a_n = bn + c$ divergent si $b \neq 0$.

   Preuve. Sinon, on aurait $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, et donc $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - c}{b} = \frac{a-c}{b}$. Mais on a vu que $\lim_{n\to\infty} n$ n'existe pas ! □

Proposition 2.4. *Si (a_n) et (b_n) convergent et $a_n \leq b_n$ pour n assez grand*[1]*, alors $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n \leq b_n$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|b_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $a \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = b + \varepsilon$. On a donc montré que $a \leq b + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. D'où $a \leq b$. □

Théorème 2.5 (Deux Gendarmes / Sandwich)**.** *Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour n assez grand, et si $a_n \longrightarrow \ell$ et $c_n \longrightarrow \ell$, alors $b_n \longrightarrow \ell$.*

1. c'est à dire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leq b_n$ dès que $n \geq N$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n \leq b_n \leq c_n$, $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $|c_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors $-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$, d'où $-\varepsilon \leq b_n - \ell \leq \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Exemples:

1) Suites géométriques $a_n = ar^n$, pour $a > 0$ et $r > 0$. La suite converge vers 0 si $0 < r < 1$, est constante $= a$ si $r = 1$, et diverge si $r > 1$.
Preuve. Si $r > 1$, on montre par récurrence que $a_n \geq a(r-1)n$ (suite arithmétique $\Rightarrow$ non-bornée). Init: $a_0 = a \geq 0$. Pas de récurrence:
$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + a_n = \underbrace{r^n}_{\geq 1} a(r-1) + \underbrace{a_n}_{\geq a(r-1)n} \geq a(r-1)(n+1).$$
Si $r < 1$, soit $\varepsilon > 0$. On pose $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}s^n$ avec $s = \frac{1}{r} > 1$, et donc b_n n'est pas bornée (par la partie précédente). On trouve donc N tel que pour tout $n \geq N$, on a $b_n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors, dès que $n \geq N$, $|a_n - 0| = a_n = \frac{1}{b_n} \leq \varepsilon$. □

Sem. 5 2) Soit $a_n = \frac{5^n}{n!}$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. En effet,
$$a_n = \frac{5}{n} \cdot \frac{5}{n-1} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{5^5}{5!} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} \cdot \frac{5^5}{5!} = \underbrace{\left(\frac{6}{5}\right)^5 \frac{5^5}{5!}}_{a} \cdot \Big(\underbrace{\frac{5}{6}}_{r}\Big)^n.$$
Donc $0 \leq a_n \leq a(\frac{5}{6})^n \longrightarrow 0$ car $\frac{5}{6} < 1$, donc $a_n \longrightarrow 0$ par les deux gendarmes.

2.4 Limites infinies

Définition 2.8. Une suite (a_n) **tend vers** $\begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\begin{smallmatrix} a_n \geq A \\ a_n \leq A \end{smallmatrix}$. Notations: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $a_n \longrightarrow \pm\infty$.

Avec des mots: a_n devient et reste arbitrairement grand (resp. petit) pour n assez grand.

Remarque 2.4. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, la suite (a_n) n'est pas bornée, donc divergente!

Exemple: $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On choisit $N \geq A$. Alors dès que $n \geq N$, on a $a_n = n \geq N \geq A$. Comme A était arbitraire, on a $a_n \longrightarrow +\infty$.

Proposition 2.6 (Opérations algébriques avec limites infinies)**.**

Calculs autorisés	*Formes indéterminées*
$\infty + \boxed{\textit{bornée}} = \infty$ $\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$	$\boldsymbol{\infty - \infty}$
$\infty \cdot \boxed{\geq \varepsilon} = \infty$	$\boldsymbol{\infty \cdot 0}$
$\dfrac{\boxed{\textit{bornée}}}{\infty} = 0, \quad \dfrac{\boxed{\geq \varepsilon}}{0^{\pm}} = \pm\infty$	$\boldsymbol{\frac{0}{0}}, \quad \boldsymbol{\frac{\infty}{\infty}}$
Tout sauf ci-contre.	$\boldsymbol{1^{\pm\infty}}, \quad \boldsymbol{\infty^0}, \quad \boldsymbol{0^0}$

Explications: $\boxed{\textit{bornée}}$ *désigne une suite bornée (convergente ou non),* $\boxed{\geq \varepsilon}$ *une suite contenue dans* $[\varepsilon, +\infty[$ ***avec*** $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, 0^+ *une suite convergeant vers 0 mais restant toujours positive (et négative pour* 0^-*). Exemples:*

$\infty + \boxed{\textit{bornée}} = \infty$	*Si* $a_n \to \infty$ *et* (b_n) *est bornée, alors* $(a_n + b_n) \to \infty$.
$\infty + \infty = \infty$	*Si* $a_n \to \infty$ *et* $b_n \to \infty$ *alors* $(a_n + b_n) \to \infty$.
$\infty - \infty = ?$	*Si* $a_n \to \infty$ *et* $b_n \to -\infty$, *on ne peut rien conclure sur* $a_n + b_n$.

Exemples de formes indéterminées: Pour $\infty - \infty$, on considère les trois suites $a_n = (n+1)^2 - n^2, b_n = (n+1) - n$, et $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. En prenant la limite, les trois sont du type $\infty - \infty$, mais on a $a_n \to \infty, b_n \to 1$, et $c_n \to 0$. Pour $\infty \cdot 0$, prendre $e^{(\cdots)}$ d'un $\infty - \infty$. Pour les fractions, on a $\infty \cdot 0 = \frac{0}{1/\infty} = \frac{\infty}{1/0}$. Et pour le reste, prendre $e^{(\cdots)}$ d'un $\infty \cdot 0$.

Théorème 2.7 (Théorème du gendarme seul / de la tartine)**.** *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$ *et* $\begin{matrix} b_n \geq a_n \\ b_n \leq a_n \end{matrix}$ *pour* n *assez grand, alors* $\lim_{n\to\infty} b_n = \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$.

Exemple: $a_n = n^2 + n\sin(n) \geq n^2 - n = n(n-1) \geq (n-1)^2 \to +\infty$, donc $a_n \to +\infty$.

2.5 Critères de convergence

Théorème 2.8 (Croissance majorée)**.** *Toute suite* $\begin{matrix}\textit{croissante} \\ \textit{décroissante}\end{matrix}$ *et* $\begin{matrix}\textit{majorée} \\ \textit{minorée}\end{matrix}$ *converge.*

Corollaire 2.9. *Toute suite monotone et bornée converge.*

Preuve du théorème (cas croissante + majorée). Posons $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $s = \sup A$. On va montrer que $a_n \to s$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme s est le plus petit majorant, $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant, et il existe donc $a \in A$ tel que $s - \varepsilon \leq a \leq s$. Comme $a \in A$, on a $a = a_N$ pour un $N \in \mathbb{N}$. Mais dès que $n \geq N$, on a $a_n \geq a_N$ et donc

$$s - \varepsilon \leq a_N \leq a_n \leq s \quad \Rightarrow \quad a_n \in [s - \varepsilon, s] \quad \Rightarrow \quad |a_n - s| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Exemple: On considère $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Quelques valeurs:

$$(a_n)_{n\geq 1} = (2,\ 2.25,\ 2.\overline{370},\ \dots) \qquad (b_n)_{n\geq 0} = (1,\ 2,\ 2.5,\ 2.\overline{6},\ 2.70\overline{83},\ \dots).$$

Affirmation:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(i)} & a_n \leq b_n \text{ pour tout } n \geq 1, \\ \text{(ii)} & (b_n) \text{ est majorée (donc } (a_n) \text{ aussi)}, \\ \text{(iii)} & (a_n) \text{ est croissante}, \\ \text{(iv)} & (b_n) \text{ est croissante}. \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent !}$$

Preuve. (i) On a $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = b_n$, où l'on a utilisé les définitions de a_n et b_n, la formule du binôme de Newton (Série 4) et où l'inégalité suit de:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n!/(n-k)!}{n^k} = \frac{1}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1}\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leq 1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}.$$

(ii) On a $\frac{1}{k!} = \frac{1}{k\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \leq \frac{1}{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}} = 2\frac{1}{2^k}$, d'où

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} \leq 2\frac{1-0}{1/2} = 4,$$

où l'égalité du milieu suit de la formule $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$, voir Série 1/4.

(iii) En utilisant le fait que $\frac{a}{b} \leq \frac{a+1}{b+1}$ si $0 < a \leq b$ (exercice facile !), et en reprenant l'argument du (i), on remarque que

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n}{n} \quad \cdot \quad \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}$$
$$\leq \frac{1}{k!}\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{n-k+2}{n+1} = \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}$$

d'où $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$.

(iv) On a simplement $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{(n+1)!} \geq b_n$. □

Par croissance majorée, (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux ! En fait, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e = 2.7182818\cdots = \textbf{nombre d'Euler}.$$

Théorème 2.10 (Critère de D'Alembert pour les suites)**.** *Soit* (a_n) *une suite telle que* $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe* $\in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$*. Alors* $a_n \longrightarrow 0$ *si* $\rho < 1$ *et* (a_n) *diverge si* $\rho > 1$.

Remarque 2.5. Attention: le critère ne se prononce pas si $\rho = 1$. De plus, il existe une version plus générale avec lim sup / lim inf, voir section suivante.

Preuve. Si $\rho < 1$, alors $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \rho < 1$, on trouve donc un $r < 1$ tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq r$ pour n assez grand, disons $n \geq N$. On a alors, pour $n \geq N$,

$$0 \leq |a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq r^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_N| = \left(|a_N|r^{-N}\right)\cdot r^n \longrightarrow 0$$

par le théorème des deux gendarmes. Et si $\rho > 1$, on pose $b_n = \frac{1}{a_n}$, et on a $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\rho} < 1$. Donc $|b_n| \longrightarrow 0$, et ainsi $|a_n| \longrightarrow \infty \Rightarrow (a_n)$ diverge. □

Exemples:

1) $a_n = \dfrac{n^{140}}{2^n}$. On a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^{140}/2^{n+1}}{n^{140}/2^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{140}\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$. Donc $a_n \longrightarrow 0$.

   Plue généralement, si $a_n = \dfrac{n^k}{r^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r > 1$, d'Alembert donne $\rho = \frac{1}{r} < 1$ et donc $a_n \longrightarrow 0$.

2) Si $a_n = \sqrt[n]{n}$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Par l'exemple précédent, la suite $b_n = \frac{n}{(1+\varepsilon)^n}$ converge vers 0. On trouve donc N tel que, dès que $n \geq N$, on a $b_n = \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} \leq 1$, d'où $n \leq (1+\varepsilon)^n$. Ainsi, en prenant les racines n-ièmes,

$$1 \leq n \leq (1+\varepsilon)^n \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon.$$

   Comme ε était arbitraire, on a bien montré que $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.

Définition 2.9. Pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'*entiers* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strictement croissante ($n_{k+1} > n_k$), la **sous-suite** correspondante est $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Exemple: Si $a_n = \frac{1}{n+4}$ et $n_k = 2k+1$, on a $a_{n_k} = \frac{1}{(2k+1)+4} = \frac{1}{2k+5}$. Attention: $n_k = 5$ et $n_k = \frac{1}{k}$ ne sont pas des indices valables.

Théorème 2.11 (Convergence et sous-suites)**.** *Pour une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on a* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ *si et seulement si* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$ *pour toute sous-suite* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Preuve. Exercice. □

Théorème 2.12 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite* bornée *possède une sous-suite convergente.*

Preuve visuelle. Vue en cours. □

Exemple: $a_n = (-1)^n$ est une suite bornée, mais divergente. En revanche les sous-suites $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ et $a_{2k+1} = -1$ sont constantes, donc convergentes !

Définition 2.10. Une suite (a_n) est **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

Avec des mots: ses termes deviennent *arbitrairement proches les uns des autres*, pourvu qu'on *attende assez longtemps*, i.e. lorsque les indices sont assez grands.

Exemple: On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$ (récurrence double). Soit alors $\varepsilon > 0$, et soit N tel que $2^N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. On remarque (image vue en cours) que dès que $m, n \geq N$, a_m et a_n appartiennent au même intervalle de longueur $\dfrac{1}{2^N}$. Ainsi $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$. Donc (a_n) est de Cauchy $\Rightarrow$ elle converge par le théorème suivant !

Théorème 2.13 (Convergente $\Leftrightarrow$ de Cauchy)**.** *Une suite (a_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Preuve. Pour $\Rightarrow$, soit (a_n) une suite telle que $a_n \longrightarrow a$; on doit montrer que (a_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, dès que $m, n \geq N$, on a

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que (a_n) est de Cauchy.

Pour $\Leftarrow$, on commence par montrer que la suite est bornée. Soit $\varepsilon = 17$ et N tel que pour tous $m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \varepsilon = 17$. Alors, $a_n \in [a_N - 17, a_N + 17]$ dès que $n \geq N$, et on agrandit l'intervalle pour englober les autres a_n: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n \in \Big[\min\{a_0, \ldots, a_{N-1}, a_N - 17\}, \max\{a_0, \ldots, a_{N-1}, a_N + 17\}\Big]$$

et (a_n) est donc bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous suite a_{n_k} qui converge, disons vers a. Soit alors $\varepsilon > 0$, N tel que $\forall m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et k tel que $|a_{n_k} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $n_k \geq N$. Alors dès que $n \geq N$ on a (en posant $m = n_k$)

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_m| + |a_{n_k} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que $a_n \longrightarrow a$. □

Sem. 6

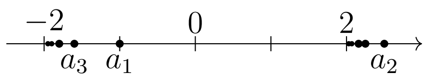
2.6 Liminf et Limsup

Définition 2.11. Soit (a_n) une suite. On note $\{a_{\geq n}\} = \{a_m \mid m \geq n\}$, et on définit:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_{\geq n}\} \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_{\geq n}\}$$

Exemple: Considérons la suite $a_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)(-1)^n$, pour $n \geq 1$:

$$(a_n) = (-1, 2.5, -1.\overline{6}, 2.25, -1.8, 2.1\overline{6}, \ldots)$$



Alors $\{a_{\geq 1}\} = \{-1, 2.5, -1.\overline{6}, 2.25, -1.8, 2.1\overline{6}, \ldots\}$, et $\{a_{\geq 2}\}$ (resp. $\{a_{\geq 3}\}$, ...) s'obtiennent en enlevant le premier (resp. les deux premiers,...) éléments de cet ensemble. On a ainsi

$$(\inf\{a_{\geq n}\})_n = (-2, -2, -2, \ldots) \quad \text{et} \quad (\sup\{a_{\geq n}\})_n = (a_2, a_2, a_4, a_4, a_6, a_6, \ldots),$$

comme on peut le voir dans le tableau suivant:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\sup\{a_{\geq n}\}$	$a_2 = 2.5$	$a_2 = 2.5$	$a_4 = 2.25$	$a_4 = 2.25$	a_6	a_6	a_8	a_8	$\cdots$
$\inf\{a_{\geq n}\}$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	$\cdots$

Ainsi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -2$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{2k}\right) = 2.$

Remarque 2.6. En fait, on voit que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(2 - \dfrac{1}{2k+1}\right)\cdot(-1) = -2.$

Théorème 2.14. *Pour une suite bornée (a_n), on a*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max\left\{\begin{matrix}\textit{limites de sous-suites}\\ \textit{convergentes}\end{matrix}\right\} \textit{ et } \liminf_{n\to\infty} a_n = \min\left\{\begin{matrix}\textit{limites de sous-suites}\\ \textit{convergentes}\end{matrix}\right\}.$$

Remarque 2.7.
- Pour (a_n) générale, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas forcément, mais $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ existent toujours (dans $\mathbb{R}$ si la suite est bornée, et dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ si elle ne l'est pas). En effet, si (a_n) est bornée, disons $(a_n)\in[A,B]$, la suite $s_n = \sup\{a_{\geq n}\}$ est minorée (par A), et comme $\{a_{\geq n+1}\}\subseteq\{a_{\geq n}\}$, on a
$$s_{n+1} = \sup\{a_{\geq n+1}\} \leq \sup\{a_{\geq n}\} = s_n.$$
La suite (s_n) est donc décroissante minorée $\Rightarrow$ (s_n) converge $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. (Et similairement pour $\liminf$).
- On a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, avec égalité si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe ! Dans ce cas, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- Version plus générale du critère de d'Alembert: $a_n \to 0$ si $\rho_{\text{sup}} = \limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ et (a_n) diverge si $\rho_{\text{inf}} = \liminf\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Exemples:
- $a_n = (-1)^n$. <u>Avec le théorème:</u> Si $n_k = 2k$, alors $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1 \longrightarrow 1$. Comme $a_n \leq 1$, il n'y a pas de sous-suite plus grande ! D'où $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Similairement, si $n_k = 2k+1$, alors $a_{n_k} = (-1)^{2k+1} = -1 \longrightarrow -1 \Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.
<u>Sans le théorème:</u> $(a_n) = (1,-1,1,-1,1,\dots) \Rightarrow \{a_{\geq n}\} = \{-1,1\}\ \forall n$. On a donc $\sup\{a_{\geq n}\} = 1 \to 1 \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ et $\inf\{a_{\geq n}\} = -1 \to -1 \Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.
- $a_n = \dfrac{(-2)^n - 1}{2^n - 1}, n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n) = (-3, 1, -\frac{9}{7}, 1, -\frac{33}{31}, 1, \dots)$.
<u>Avec le théorème:</u> Si $n_k = 2k$, alors $a_{n_k} = \frac{2^{2k}-1}{2^{2k}-1} = 1 \longrightarrow 1 \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, et si $n_k = 2k+1$, alors $a_{n_k} = \frac{-2^{2k+1}-1}{2^{2k+1}-1} = -\frac{1+2^{-(2k+1)}}{1-2^{-(2k+1)}} \longrightarrow -\frac{1}{1} \Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.
<u>Sans le théorème:</u> On a, suivant la parité de n:
$$\{a_{\geq n}\} = \{1, -\tfrac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1}, 1, -\tfrac{2^{n+3}+1}{2^{n+3}-1}, 1, \dots\} \text{ ou } \{-\tfrac{2^n+1}{2^n-1}, 1, -\tfrac{2^{n+2}+1}{2^{n+2}-1}, 1, -\tfrac{2^{n+4}+1}{2^{n+4}-1}\dots\}.$$
Donc $\sup\{a_{\geq n}\} = 1 \to 1 \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Et pour $\inf\{a_{\geq n}\}$, on remarque que la suite $b_n = -\frac{2^n+1}{2^n-1}$ est croissante (vérifier que $b_{n+1} > b_n$). Donc
$$\inf\{a_{\geq n}\} = \begin{cases} -\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1} \longrightarrow -1 \\ \text{ou } -\frac{2^n+1}{2^n-1} \longrightarrow -1\end{cases} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Chapitre 3: Séries

3.1 Définition et exemples

Rappel de notation: $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Définition 3.1. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite.

- La **série de terme général** (a_k) est $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est la n-**ième somme partielle**. On a donc $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$.
- La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe $\in \mathbb{R}$. Elle **diverge** si elle ne converge pas.

Exemples:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Le terme général est $a_k = \frac{1}{2^k}$, et la n-ième somme partielle est $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.
Cette série converge: En effet
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) + 1 =$$
$$= \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1 - \underbrace{(\tfrac{1}{2})^{n+1}}_{\longrightarrow 0}) \longrightarrow 2.$$
où l'on a utilisé l'exercice $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$ et donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

2) **Série géométrique:** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \text{converge et vaut } \frac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1 \\ \text{diverge si } |q| \geq 1 \end{cases}$ (exercice).

3) La série $\sum_{k=0}^{\infty} 1$, de terme $a_k = 1$, et somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, diverge: On a $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty \notin \mathbb{R}$. Même chose pour la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ de terme $a_k = (-1)^k$: La suite des sommes partielles (S_n) diverge, donc la série aussi.

Proposition 3.1 (Série conv. $\Rightarrow$ terme $\longrightarrow 0$)**.** *Si* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge, alors* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Preuve. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\Leftrightarrow$ (S_n) converge $\Leftrightarrow$ (S_n) est de Cauchy. Donc
$$|S_n - S_{n-1}| \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = |a_n| \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Attention: L'autre direction $\Leftarrow$ n'est pas vraie en général !

4) **Série harmonique:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Le terme général est $a_k = \frac{1}{k}$. On a $a_k \longrightarrow 0$, et pourtant cette série diverge !

Preuve informelle.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots \geq \underbrace{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots}_{\to +\infty.}$$

□

Preuve formelle. (S_n) n'est pas de Cauchy ! □

3.2 Critères de convergence pour les séries

Suite des exemples:

5) **Série harmonique alternée:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Cette série converge (vers $-\log(2)$, cf chapitre 5). Pour cela on a besoin de:

Proposition 3.2 (Critère de Leibniz pour les séries alternées)**.** *Si*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |a_{k+1}| \leq |a_k| \\ 2)\ \text{signe}(a_{k+1}) = -\text{signe}(a_k)\ \textit{(les signes alternent)}, \end{array}\right\}\ \textit{(pour } k \textit{ assez grand)}$$

3) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$,

alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge.*

Retour à l'exemple 5: La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est de terme général $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$. On a

1) $|a_{k+1}| = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = |a_k|$,
2) $\text{signe}(a_{k+1}) = -\text{signe}(a_k)$,
3) $\lim_{k \to \infty} |a_k| = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$. Donc la série converge.

6) La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots$ converge. (Et vaut $\ldots \frac{\pi^2}{6}$!).

Preuve. En séparant les termes pairs et impairs, on trouve

$$\begin{aligned} S_n \leq S_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = 1 + \frac{2}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} S_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $S_n \leq 1 + \frac{1}{2}S_n \Rightarrow \frac{1}{2}S_n \leq 1 \Rightarrow S_n \leq 2$. La suite (S_n) est donc majorée et croissante, donc elle converge (tout comme la série). □

Que dire alors des séries $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \ldots$?

Proposition 3.3 (Critère de comparaison, terme ≥ 0)**.** *Soient* $(a_k), (A_k)$ *deux suites telles que* $0 \leq a_k \leq A_k$ *(pour* k *assez grand). Alors*

1) $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *converge* $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge.* *2)* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverge* $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *diverge.*

Preuve. On pose $S_n^a = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $S_n^A = \sum_{k=0}^{n} A_k$.

1) (S_n^a) est croissante, et $S_n^a \leq S_n^A$ qui converge $\Rightarrow$ bornée. Donc S_n^a converge, par croissance majorée.
2) (S_n^a) est croissante et divergente, d'où $S_n^a \longrightarrow +\infty$. Ainsi $S_n^A \longrightarrow +\infty$ par le théorème du gendarme seul. □

Conséquence: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge par comparaison. En effet, $0 \leq \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. En fait pour $p \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$ (Exercice).

Définition 3.2. Une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

Proposition 3.4 (Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence)**.** *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série absolument convergente. On note S_n ses sommes partielles, et S_n^{abs} les sommes partielles de $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Alors,

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |S_m^{abs} - S_n^{abs}| \longrightarrow 0$$

car (S_m^{abs}) converge, et est donc de Cauchy. Donc (S_n) est aussi de Cauchy, et converge. □

Remarque 3.1. • Si $a_k \geq 0$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente $\Leftrightarrow$ absolument convergente.

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente, mais pas absolument convergente: $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

Proposition 3.5 (Critère de d'Alembert pour les séries)**.** *Soit* (a_k) *une suite telle que* $\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ *existe* $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Alors* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge absolument (donc converge) si* $\rho < 1$ *et diverge si* $\rho > 1$.

Remarque 3.2. • Attention: le critère ne se prononce pas si $\rho = 1$.

• Version plus générale: La série converge absolument si $\rho_{\text{sup}} = \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ et diverge si $\rho_{\text{inf}} = \liminf_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$

Proposition 3.6 (Critère de Cauchy / de la racine). *Soit* (a_k) *une suite telle que* $\sigma = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *existe* $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Alors* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge absolument (donc converge) si* $\sigma < 1$ *et diverge si* $\sigma > 1$.

Remarque 3.3. • Attention: le critère ne se prononce pas si $\sigma = 1$.
• Version plus générale: On remplace σ par $\sigma_{\text{sup}} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Exemple: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$. On a $a_k = \frac{2^k}{k!}$, et on utilise d'Alembert:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0.$$

Donc $\rho = 0 < 1$ et la série converge absolument.

3.3 Séries avec paramètre

Sem. 7 Ce sont des séries où le terme général $a_k = f_k(x)$ dépend d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$. La convergence dépend donc aussi de $x \in \mathbb{R}$!

Exemples:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}$ (pour $x \in \mathbb{R}^*$). Le terme général est $a_k = \frac{k^2}{x^k}$. On utilise d'Alembert: $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{|x|^{k+1}} \frac{|x|^k}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^k}{|x|^{k+1}} = \frac{1}{|x|}$. Donc la série converge absolument si $\rho < 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ et diverge si $\rho > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Et si $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$? On vérifie les deux cas individuellement: Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{1^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2$ diverge, car $k^2 \not\longrightarrow 0$, et si $x = -1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2$ diverge, car $(-1)^k k^2 \not\longrightarrow 0$. En résumé, la série converge $\Leftrightarrow |x| > 1$.

Définition 3.3. Le **domaine de convergence** d'une série à paramètre x est

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ la série converge}\}.$$

On a donc $D\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (pour $x \in \mathbb{R}$). Si $x = 0$, la série vaut $0^0 + 0 = 1$ (donc converge). Si $x \neq 0$, on utilise d'Alembert: $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$. La série converge donc absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $D = \mathbb{R}$. On verra plus tard que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Définition 3.4. Une série à paramètre x de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ s'appelle une **série entière**. Le nombre x_0 est le **centre** de la série.

Exemple: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-0)^k$ est une série entière de centre 0. De même pour la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ avec $b_k = 0$ si k est impair, et $b_k = \dfrac{1}{k!}$ si k est pair. Par contre, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}$ n'en est pas une.

Théorème 3.7 (Convergence des séries entières)**.** *Soit* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ *une série entière. Alors il existe un unique nombre* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ *appelé* ***rayon de convergence*** *de la série, tel que la série converge si* $|x - x_0| < r$ *et diverge si* $|x - x_0| > r$.

Idée de la preuve. Appliquer le critère de Cauchy (généralisé). □

Remarque 3.4. Les cas $|x - x_0| = r \Leftrightarrow = x = x_0 \pm r$ sont à traiter individuellement. Donc $D\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k\right) = \begin{smallmatrix}[\\]\end{smallmatrix}\, x_0 - r,\ x_0 + r \,\begin{smallmatrix}[\\]\end{smallmatrix}$ (4 possibilités).

Exemple: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k \cdot 2^k}$. C'est une série entière avec $b_k = \dfrac{1}{k \cdot 2^k}$. On applique le critère de d'Alembert (attention: le terme vaut $a_k = \frac{(x-3)^k}{k \cdot 2^k}$)

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x-3| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k \cdot 2^k}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{|x-3|}{2}.$$

Ainsi la série converge absolument si $\rho < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2$, et diverge si $\rho > 1 \Leftrightarrow |x-3| > 2$. Le rayon de convergence est donc $r = 2$.
On trouve donc $D \supseteq\ ]3-2, 3+2[\ =]1,5[$, et il faut encore vérifier les cas $x = 1$ et $x = 5$. Pour $x = 5$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5-3)^k}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ qui diverge (série harmonique), et pour $x = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-3)^k}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ qui converge (série harmonique alternée). Donc $D = [1, 5[$.

Remarque 3.5. • Le cas $r = +\infty$ est aussi possible, lorsque la série converge pour tout $x \in \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

- Formules pour le rayon de convergence:

$$r = \lim_{k\to\infty} |b_k|^{-1/k} \quad \text{et} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|$$

lorsque ces limites existent. (C'est l'inverse ($\frac{1}{\dots}$) des critères de Cauchy/de d'Alembert, mais appliqué à b_k et non à a_k).

Chapitre 4: Fonctions

4.1 Rappels

On suppose connu toutes les définitions du chapitre 0.

Définition 4.1. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors f est **majorée** (resp. **minorée**, **bornée**) sur $A \subseteq D$ si l'ensemble $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ l'est. On définit

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f(A), \quad \inf_{x\in A} f(x) = \inf f(A)$$

et

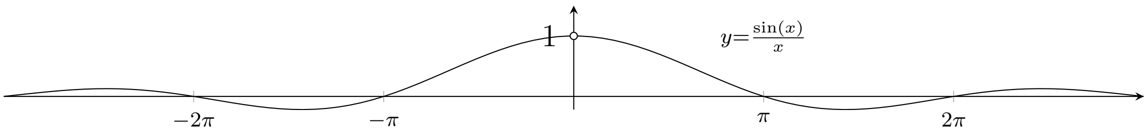
$$\max_{x\in A} f(x) = \max f(A), \quad \min_{x\in A} f(x) = \min f(A)$$

lorsque ces quantités existent.

Ex: $f(x) = (x-1)^2 + 2$, $A =]-1,4[$. On a $\inf_{x\in A} f(x) = 2 = \min_{x\in A} f(x), \sup_{x\in A} f(x) = 11, \max_{x\in A} f(x)$ n'existe pas.

4.2 Limites de fonctions

Exemple: $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. On a $D(f) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Que se passe-t-il en 0 ? Rien ! En effet: $0 \notin D$. Par contre on dirait que $f(x) \longrightarrow 1$ lorsque $x \to 0$. Graphe:



Idée: Formaliser ça. On aimerait dire $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Ingrédients:

1) $f(x)$ doit être définie "un peu autour" de x_0, et
2) f doit s'approcher de ℓ lorsque x s'approche de x_0.

Définition 4.2. Une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ est **définie au voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$]x_0 - d, x_0[\ \cup\ ]x_0, x_0 + d[\ \subseteq D(f) \quad \text{pour un } d > 0.$$

Exemple: $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est définie au voisinage de 0 (on peut choisir n'importe quel $d > 0$), même si elle n'est pas définie en 0 !

Définition 4.3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Alors f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite lorsque** x **tend vers** x_0, noté

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell,$$

si $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ on a $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Avec des mots: $f(x)$ est *arbitrairement proche* de ℓ dès que x est *assez proche* de x_0 (mais $\neq x_0$). Comparaison avec les suites: $a_n \longrightarrow a$ si a_n est *arbitrairement proche* de ℓ dès que n est *assez grand* (donc *assez proche* de l'infini).

Remarque 4.1. • On va montrer plus tard que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

- Pour $\lim_{x\to x_0} f(x)$, on ne regarde jamais $f(x_0)$, mais seulement $f(x)$ pour x proche de x_0. Exemple: malgré le fait que $g(0) = 132 \neq 1$, on a
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 132 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} g(x) \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

Exemple: Soit $f(x) = 5x - 1$, et $x_0 = 2$. Montrons "à la main" que $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, donc f est bien définie au voisinage de 2.
2) Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver $\delta > 0$ tel que, dès que $|x - 2| \leq \delta$ (et $x \neq 2$), on a $|f(x) - 9| \leq \varepsilon$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Alors, pour $x \neq 2$ tel que $|x - 2| \leq \delta$, on a
$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon \quad \text{car } \delta = \frac{\varepsilon}{5}.$$
Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(= \varepsilon/5)$ tel que si $x \neq 2$ et $|x - 2| \leq \delta$, on a $|f(x) - 9| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$.

Heureusement, les suites viennent en aide pour simplifier les calculs:

Théorème 4.1 (Limites de fonctions et suites)**.** *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ pour* ***toute*** *suite $(a_n) \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.*

Idée: $a_n \longrightarrow x_0$ = manière de s'approcher de x_0. Donc $f(x) \longrightarrow \ell$ si $f(a_n) \longrightarrow \ell$ pour toute les façons (a_n) de s'approcher de x_0.
Exemple: Redémontrons que si $f(x) = 5x - 1$, alors $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$. Si (a_n) est une suite telle que $a_n \longrightarrow 2$, alors on a
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 5a_n - 1 \overset{(*)}{=} 5 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9,$$
où en $(*)$, on a utilisé les propriétés algébriques des limites (cf Chap 2.3). Comme c'est vrai pour toutes les suites (a_n) qui convergent vers 2, on a bien montré que $\lim_{x\to 2} f(x) = 9$.
Attention: "*Toute* suite" est important !

Corollaire 4.2. *Si*

- *$\exists (a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ tel que $a_n \longrightarrow x_0$ mais $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ n'existe pas, ou*
- *$\exists (a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ tel que $a_n \longrightarrow x_0$ et $b_n \longrightarrow x_0$ mais $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$,*

alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple: $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. On a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc f est définie au voisinage de 0. On pose $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, de sorte que $a_n \longrightarrow 0$ et $b_n \longrightarrow 0$. Mais $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1$ et $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n + \pi) = -1$. Donc $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Remarque 4.2. On pourrait aussi prendre $c_n = \frac{1}{\pi n} \longrightarrow 0$. On a alors $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(\pi n) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ qui n'existe pas. Donc $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas non plus.

Propriétés des limites de fonctions. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de x_0 et telles que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existent. Alors

1) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$ (unicité de la limite).
2) Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to x_0} pf(x) + qg(x) = p \lim_{x\to x_0} f(x) + q \lim_{x\to x_0} g(x)$.

3) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$.

4) Si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

5) Si $f(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

6) Si $h\colon D \to \mathbb{R}$ est tel que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* x_0 et que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$.

Preuve. Utiliser les suites. □

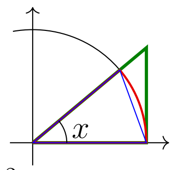
4.3 Calculs de limites

0) $\lim_{x\to u} c = c$, $\lim_{x\to u} x = u$. En effet, si $f(x) = c$ et $g(x) = x$, alors pour toute suite $a_n \longrightarrow u$, on a $f(a_n) = c \longrightarrow c$ et $g(a_n) = a_n \longrightarrow u$. Donc $\lim_{x\to u} f(x) = c$ et $\lim_{x\to u} g(x) = u$.

1) Polynômes: $\lim_{x\to u} x^2 = \left(\lim_{x\to u} x\right)^2 = u^2$ par le produit des limites. Par récurrence, on trouve $\lim_{x\to u} x^n = u^n$, et en utilisant la linéarité, on voit que si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, alors $\lim_{x\to u} P(x) = P(u)$.

2) Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P, Q des polynômes. Si $Q(u) \neq 0$, on a $\lim_{x\to u} Q(x) = Q(u) \neq 0$, et on peut appliquer la propriété du quotient des limites pour trouver $\lim_{x\to u} f(x) = \frac{\lim_{x\to u} P(x)}{\lim_{x\to u} Q(x)} = \frac{P(u)}{Q(u)}$. Exemple: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$. Pour $u = 1$, on a $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1^2-1}{1+1} = 0$ et pour $u = -1$, le dénominateur s'annule ; on réécrit
Sem. 8 donc l'expression dans la limite: $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -2$.

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$. En calculant les aires des figures colorées ci-contre, on trouve que $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$. En divisant par $x/2$, on trouve $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \leq \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)}$. En multipliant l'inégalité de droite par $\cos(x)$, on trouve $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$.



Finalement, comme $\cos(x) \in [0,1]$, on a $\cos(x) \geq \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \geq 1 - x^2$. On obtient alors la chaine d'inégalités suivantes (qui est vraie pour $0 < x < \pi/2$, donc aussi pour $-\pi/2 < x < 0$ car ce sont des fonctions paires):

$$\underbrace{1 - x^2}_{\longrightarrow 1} \leq \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{1}_{\longrightarrow 1}$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ par le théorème des deux gendarmes.

Proposition 4.3 (Limites de composées)**.** *Soient* $f\colon A \to B$ *et* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *telles que*
1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *2)* $\lim_{x\to b} g(x) = c$ *et* *3)* $f(x) \neq b$ *au voisinage de* a.
Alors:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Preuve. On utilise la caractérisation avec les suites (Théorème 4.1). Soit $(x_n)_n \subset A\backslash\{a\}$ telle que $x_n \to a$. On pose $y_n = f(x_n)$. Alors $y_n \longrightarrow b$ par 1), et $y_n \neq b$ par 3). Donc $(y_n)_n \subset B \setminus \{b\}$, d'où $g(f(x_n)) = g(y_n) \longrightarrow c$ par 2). □

Exemples:

- $\lim\limits_{x\to 1} \cos(x^{12}-1) = \lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$ où $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = x^{12}-1$. On a 1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^{12}-1) = 0$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\cos(x) = 1$, et 3) $x^{12}-1 \neq 0$ dès que $x \neq \pm 1$, donc $x^{12}-1 \neq 0$ au voisinage de 1. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1}\cos(x^{12}-1) \overset{y=x^{12}-1}{=} \lim\limits_{y\to 0}\cos(y) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{3x^2+\sin^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)/x^2}{(3x^2+\sin^2(x)/x^2)} = \dfrac{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}{3+\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y}{3+y} = \dfrac{1}{4}$, où l'on a fait le changement de variables $y = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$; on a $y \to 1$ lorsque $x \to 0$.
- Attention: La condition 3) est importante: Si $f(x) = 3$ et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x \neq 3, \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to 0} g(3) = 0 \neq \lim\limits_{y\to 3} g(y) = 2$. On ne peut donc pas faire le changement de variables $y = f(x)$.

Proposition 4.4 (Limites de réciproques)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Soit $u \in [a,b]$ et $v = f(u)$. Alors $f\colon [a,b] \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective, et si $f^{-1}\colon \mathrm{Im}(f) \to [a,b]$ est définie au voisinage de v, on a $\lim\limits_{x\to v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = u$.*

Corollaire 4.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $v \geq 0$, on a $\lim\limits_{x\to v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$.*

Preuve. On considère $f(x) = x^n$ qui est strictement croissante sur $[0,a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$ pour tout $v \geq 0$. □

4.4 Limites à gauche/droite, limites (vers l')infini(es)

On généralise $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \ell$ en 1) $\lim\limits_{x\downarrow u}$ et $\lim\limits_{x\uparrow u}$, 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ et 3) $\lim f(x) = \pm\infty$.

Définition 4.4. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage $\begin{matrix}\text{à gauche}\\ \text{à droite}\end{matrix}$ de $u \in \mathbb{R}$ (c'est à dire $\begin{matrix}]u-d,u[\subseteq D \\ ]u,u+d[\subseteq D \end{matrix}$ pour un $d > 0$). Alors f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite** $\begin{matrix}\textbf{à gauche}\\ \textbf{à droite}\end{matrix}$ **lorsque** x **tend vers** u, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D \setminus \{u\}, \text{ on a } \begin{matrix} x \in [u-\delta, u[\\ x \in]u, u+\delta] \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation: Limite à gauche	Limite à droite
$\lim\limits_{x\uparrow u} f(x) = \lim\limits_{x\to u^-} f(x) = \ell$	$\lim\limits_{x\downarrow u} f(x) = \lim\limits_{x\to u^+} f(x) = \ell$

Notation: Version avec les suites: Pour toute suite $(x_n) \subset D \setminus \{u\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$ et $\begin{matrix} x_n < u \\ x_n > u, \end{matrix}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Exemple: Si $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, alors $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$. Donc $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\uparrow 0} -1=-1$ et $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\downarrow 0} 1=1$.

Proposition 4.6. *Si f est définie au voisinage de u, alors*

$$\lim_{x\to u} f(x)=\ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\uparrow u} f(x)=\ell \text{ et } \lim_{x\downarrow u} f(x)=\ell.$$

Remarque 4.3. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ n'existe pas (limites à gauche et à droite ne sont pas égales).

Définition 4.5. Soit $f\colon D\to\mathbb{R}$ définie au voisinage de $\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$ (c'est à dire $\begin{matrix}]a,+\infty[\subseteq D\\ ]-\infty,a[\subseteq D\end{matrix}$ pour un $a\in\mathbb{R}$). Alors f **admet** $\ell\in\mathbb{R}$ **comme limite lorsque** x **tend vers** $\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$ si

$$\forall\varepsilon>0, \exists C\in\mathbb{R} \text{ tel que } \forall x\in D \text{ on a } \begin{matrix}x\geq C\\ x\leq C\end{matrix} \Rightarrow |f(x)-\ell|\leq\varepsilon.$$

Notation: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$, ou $f(x)\overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\ell$. Version avec les suites: Pour toute suite $(x_n)\subset D$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{matrix}+\infty\\-\infty,\end{matrix}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell$.

Exemple: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Soit $\varepsilon>0$. Posons $C=\frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x\geq C$, on a $|\frac{1}{x}-0|=\frac{1}{x}\leq\frac{1}{C}\leq\varepsilon$.

Remarque 4.4. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow f(x)$ possède une **asymptote horizontale** d'équation $y=\ell$.

Définition 4.6. Soit $f\colon D\to\mathbb{R}$ déf. au voisinage de $u\in\mathbb{R}$. Alors $f(x)$ **tend vers** $\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$ **lorsque** x **tend vers** u si

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x\in D\setminus\{u\} \text{ on a } |x-u|\leq\delta \Rightarrow \begin{matrix}f(x)\geq A\\ f(x)\leq A.\end{matrix}$$

Notation: $\lim\limits_{x\to u} f(x)=\pm\infty$, ou $f(x)\overset{x\to u}{\longrightarrow}\pm\infty$. Version avec les suites: Pour toute suite $(x_n)\subset D$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=u$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\begin{matrix}+\infty\\-\infty.\end{matrix}$

Exemple: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. Soit $A\in\mathbb{R}$, et posons $\delta=\frac{1}{\sqrt{A}}$. Alors, dès que $|x-0|\leq\delta$, on a $\frac{1}{x^2}\geq\frac{1}{\delta^2}\geq A$, car $\frac{1}{\delta^2}\geq A\Leftrightarrow\delta^2\geq\frac{1}{A}$.

Remarque 4.5.

- On peut combiner 1), 2), 3): Par exemple, on a $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\uparrow 0}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-1=+\infty$.
- On a $\lim\limits_{x\to u^\pm}=\pm\infty\Leftrightarrow f(x)$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x=u$.
- Les propriétés algébriques, ainsi que le théorème des deux gendarmes, des composées et des réciproques restent valables pour ces limites généralisées.
- Finalement, les calculs avec ∞ valables pour les suites ($+\infty+\infty=+\infty$, théorème du gendarme seul, ...) restent valables pour les limites infinies de fonctions. Attention: $\infty-\infty, 0\cdot\infty,\ldots$ sont toujours des formes indéterminées !

4.5 Fonctions continues

Définition 4.7. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ déf. au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue en** u si $\lim\limits_{x\to u} f(x) = f(u)$.

Remarque 4.6. Cela implique que: 1) $u \in D$, 2) la limite existe $\in \mathbb{R}$ et 3) elle vaut $f(u)$.

Exemples: Polynômes, fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x), \arctan(x)$ $e^x, \log(x), \ldots$ sont continues en tout point de leurs domaines.

Remarque 4.7. Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$, et $a_n \longrightarrow u$, alors

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(u).$$

Exemple: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n}) = \sin(0) = 0$.

Définition 4.8. Soit f définie au voisinage $\begin{array}{l}\text{à gauche}\\ \text{à droite}\end{array}$ de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue** $\begin{array}{l}\textbf{à gauche}\\ \textbf{à droite}\end{array}$ **en** u si $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\uparrow u} f(x)\\ \lim\limits_{x\downarrow u} f(x)\end{array} = f(u)$.

Remarque 4.8. f est continue en $u \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en u.

Exemple: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$ $\Rightarrow$ f continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$, on a $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} 2x+1 = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, et f est continue en $x = 0$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues: si f, g sont continues en u, alors $f+g$, $f \cdot g$, $\alpha f + \beta g$, $\dfrac{f}{g}$ (si $g(u) \neq 0$) sont également continues en u. De plus, si f est continue en u et g est continue en $f(u)$, alors $g \circ f$ est continue en u.

Exemple: $f(x) = \frac{\sin(x^2+8x+1)}{\sqrt{x^2+5+\cos(x)}}$ est continue en tout $u \in D(f) = \mathbb{R}$.

Définition 4.9 (Prolongements par continuité)**.** Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$, avec $u \notin D$ et est telle que $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors le **prolongement par continuité** de f en u est

$$\begin{aligned} \hat{f}\colon D \cup \{u\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = u. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 4.9. $\hat{f}\colon D \cup \{u\} \to \mathbb{R}$ est l'unique fonction continue telle que $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \neq u$, et $\hat{f}(u) = \ell$. Donc $\hat{f}$ est continue en u.

Exemple: Si $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^*$, alors $\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f. (Cette fonction s'appelle parfois $\operatorname{sinc}(x)$).

Contre-exemple: La fonction $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de prolongement par continuité
Sem. 9 en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas).

Fonctions continues sur un intervalle:

Définition 4.10. Une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est **continue** (jusqu'au bord) si

1) $\lim\limits_{x\to u} f(x) = f(u)$ pour tout $u \in \,]a,b[$ $\quad$ (f continue en tout $u \in \,]a,b[$),

2) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$ (f est continue à droite en a),

3) $\lim_{x \uparrow b} f(x) = f(b)$ (f est continue à gauche en b).

De manière analogue, $f\colon I \to \mathbb{R}$ est **continue** pour $I = [a,b[$ (resp. $I =]a,b]$, $I =]a,b[$ si 1) et 2) (resp. 1) et 3), 1)) sont vérifiées.

Théorème 4.7 (Théorème de la valeur intermédiaire, TVI)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord). Alors*

$$f([a,b]) = \Big[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x) \Big].$$

Remarque 4.10. Cela veut dire que f atteint

- son inf, donc l'inf est un min: $\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$ (et $\neq -\infty$),
- son sup, donc le sup est un max: $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$ (et $\neq +\infty$),
- toutes les valeurs entre les deux !

De plus, $f([a,b])$ est donc un intervalle fermé.

Exemple d'application: L'équation $\cos(x) = x$ a une solution $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En effet, on définit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0, \tfrac{\pi}{2}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos(x) - x. \end{aligned}$$

Cette fonction est continue (jusqu'au bord), et on remarque que $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$. Ainsi par le TVI, on a

$$f([0, \tfrac{\pi}{2}]) = [\,\underbrace{\min}_{<0}, \underbrace{\max}_{>0}\,] \ni 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \text{ tel que } f(x_0) = 0.$$

Comme $f(0) \neq 0 \neq f(\frac{\pi}{2}), x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et comme $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(x_0) = x_0$, on a trouvé une solution de l'équation.

Preuve du TVI. On montre que f atteint son sup. Le reste est laissé en exercice (similaire pour inf et "dichotomie" pour les valeurs entre les deux).

Soit $s = \sup \mathrm{Im}(f)$. Par la caractérisation des sup/inf avec les suites (Prop. 2.2), il existe une suite $(y_n) \subset \mathrm{Im}(f)$ qui converge vers s. On a donc $y_n = f(x_n)$, pour une suite $(x_n) \subset [a,b]$. Cette suite est donc bornée, et, par le théorème de Bolzano-Weierstrass (Th. 2.12), possède une sous-suite convergente (x_{n_k}), disons vers $v \in [a,b]$. Ainsi,

$$f(v) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \overset{f \text{ continue}}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{\text{sous-suite}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = s. \qquad \square$$

Corollaire 4.8. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (où l'inverse !) alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f(u) = 0$.*

Preuve. Voir exemple avec $\cos(x) - x$. $\square$

Corollaire 4.9. *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue avec $I =$ intervalle ($= [a,b]$, ou $[a,b[$, ou $]-\infty, b]$, ...) alors $\mathrm{Im}(f) = f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire 4.10. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective $\Leftrightarrow$ f est strictement monotone.*

Preuve. Pour $\Leftarrow$, c'est un théorème du chapitre 0. Pour $\Rightarrow$, supposons que f n'est pas strictement monotone. Il existe donc $u, v, w \in [a,b]$ tels que $u < v < w$, mais $f(u) < f(v) > f(w)$ (ou la même chose en échangeant $<$ avec $>$). Soit alors $y \in]\max\{f(u), f(w)\}, f(v)[$. En appliquant le TVI à $f|_{[u,v]}$ et a $f|_{[v,w]}$, on trouve deux éléments $x_1 \in]u,v[$ et $x_2 \in]v,w[$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Comme on a nécessairement $x_1 < x_2$, f n'est pas injective. $\square$

Chapitre 5: Dérivées

5.1 Définition et exemples

Idée: Calculer la pente de la tangente au graphe d'une courbe.

Définition 5.1. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D$. Alors f est **dérivable** (ou **différentiable**) en x_0 si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) \quad \text{existe } \in \mathbb{R}.$$

Notations:

- $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = D_x f(x_0) = \dot{f}(x_0) = \cdots$
- $f'(x_0)$ est la **dérivée** de f en x_0.
- f est **dérivable** si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1. • $f'(x_0) =$ pente de la tangente au graphe de f, au point $(x_0, f(x_0))$.
• En faisant la substitution $x = x_0 + h$, on trouve la définition équivalente

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Définition 5.2. La **fonction dérivée** d'une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} f\colon D(f') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

On a $D(f') = \{x \in D \mid f \text{ est dérivable en } x\}$.

Exemples:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x_0+h)^2 - x_0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2hx0 + h^2}{h} = 2x_0$.
2) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ et les inégalités $1-h^2 \le \cos(h) \le 1 \Rightarrow -h = \frac{1-h^2-1}{h} \le \frac{\cos(h)-1}{h} \le 0$, d'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$, cf Chapitre 4, section 3.
On montre d'une manière analogue que la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.

Proposition 5.1. *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.*
1) Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.
2) f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$, où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 5.2. Avec des mots, le point 2) peut se reformuler:

$$f(x) = \text{ droite } + \text{ reste qui } \longrightarrow 0 \text{ plus vite que } x - x_0.$$

Sem. 10 *Preuve.* 1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$.
2) Esquisse vue en classe. □

Remarque 5.3. f continue $\not\Rightarrow$ f dérivable. Exemple: Si $f(x) = |x|$, alors f est continue (partout, donc) en 0, mais on a

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\uparrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Ainsi la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas, et f n'est donc pas dérivable en 0.

Proposition 5.2 (Opérations algébriques sur les dérivées)**.** *Soient $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ dérivables en x_0.*
1) $(p\cdot f + q\cdot g)'(x_0) = pf'(x_0) + qg'(x_0)$ *pour tous* $p, q \in \mathbb{R}$.
2) $(f\cdot g)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0)$
3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x_0)$.

Preuve. Exercice. □

<u>*Dérivées de fonctions usuelles.*</u>
0) $f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$ (la pente est nulle !)
1) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Preuve. Par récurrence. <u>Init:</u> $(n=1)$: $f(x) = x$, d'où $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = 1$.
<u>Pas de récurrence:</u> Si $f(x) = x^{n+1} = xx^n$, on trouve, en utilisant la règle du produit: $f'(x) = (xx^n)' = 1\cdot x^n + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$. □

2) $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. Pour $\tan(x)$, on utilise la règle du quotient pour trouver: $\tan'(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} =$
$= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$, ou bien $1 + \tan^2(x)$.
3) $f(x) = x^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$. On écrit $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ puis on utilise la règle du quotient pour trouver $f'(x) = (-n)x^{-n-1}$.

Proposition 5.3 (Dérivée de composée)**.** *Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to \mathbb{R}$, avec f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.*

Preuve. On écrit $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Le second quotient tend vers $f'(x_0)$ lorsque $x \to x_0$, et le premier vaut $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ (changement de variables $y = f(x), y_0 = f(x_0)$) qui tend vers $g'(y_0)$ lorsque $x \to x_0 \Rightarrow y \to y_0$. □

Proposition 5.4 (Dérivée des réciproques)**.** *Soit $f\colon A \to B$ bijective et dérivable sur tout $A =$ intervalle ouvert. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$, alors $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ pour tout $x \in B$.*

Preuve. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B. On dérive l'équation $x = f(f^{-1}(x))$ des deux côtés pour trouver $1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)$, d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. □

Exemples:

- $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ où $f(x) = x^n$. (On suppose $x > 0$). Donc $(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. On montre de manière analogue que $(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$, et on verra que $(x^u)' = ux^{u-1}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (et $x > 0$).
- $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ pour $x \in]-1,1[$. Comme $\alpha = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(\alpha) \geq 0$, donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$ et ainsi $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$. Il suit: $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 5.3. $\lim\limits_{\substack{h\downarrow 0\\ h\uparrow 0}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$ dérivée **à droite** / **à gauche** de f en x_0.

Proposition 5.5. *f est dérivable en x_0 $\Leftrightarrow$ f est dérivable à gauche et à droite en x_0,* et *les valeurs sont égales.*

Exemples:

- $f(x) = |x|$. En $x = 0$, la dérivée à droite vaut 1, et la dérivée à gauche vaut -1. Donc $f'(0)$ n'existe pas.
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$. La dérivée n'existe pas en 0 (elle vaut $+\infty$).

Définition 5.4. La **dérivée seconde** de f est: $f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$. La **dérivée d'ordre** n est $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$. Autre notation: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}f$.

Définition 5.5. Soit $I =]a,b[$ (ou un intervalle quelconque). Alors:

$$\mathcal{D}^n(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}, \text{ et}$$
$$\mathcal{C}^n(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(n)} \text{ est continue}\}.$$

On définit également $\mathcal{C}^\infty(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque 5.4.
- On a $\mathcal{C}^0(I) = \{\text{fonctions continues } f\colon I \to \mathbb{R}\}$.
- Comme toute fonction dérivable est continue, on a
$$\mathcal{C}^0 \supseteq \mathcal{D}^1 \supseteq \mathcal{C}^1 \supseteq \mathcal{D}^2 \supseteq \mathcal{C}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{D}^n \supseteq \mathcal{C}^n \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^\infty.$$

Exemples:

- ($\mathcal{C}^1 \supsetneq \mathcal{D}^2$): La fonction $f(x) = x|x|$ est dérivable, de dérivée $f'(x) = 2|x|$ continue, donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Mais f' n'est pas dérivable en 0, d'où $f \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ (même si $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty,0[)$ et $\in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$).

  Remarque 5.5. De manière analogue, $f(x) = x^n|x|$ est dans $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R})$.
- ($\mathcal{D}^1 \supsetneq \mathcal{C}^1$). Soit $f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, prolongée par continuité en 0 via: $f(0) = 0$. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty,0[) \cap \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$ et on calcule:
$$f'(x) = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + x^2(-\sin(\tfrac{1}{x}))\tfrac{-1}{x^2} = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + \sin(\tfrac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0.$$
  En $x = 0$, on a
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos(\frac{1}{h})}{h} = 0.$$
  Donc f est dérivable en 0, et donc partout: $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$. Sa dérivée est:
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0\\ 0 & x = 0.\end{cases}$$
  En revanche, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas. Donc f' n'est pas continue en 0. Ainsi $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, même si $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.

5.2 Dérivée et croissance

Théorème 5.6 (Théorème de Rolle)**.** *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue, et dérivable sur* $]a,b[$*. On suppose que* $f(a) = 0 = f(b)$*. Alors il existe* $u \in\,]a,b[$ *tel que* $f'(u) = 0$*.*

Preuve. Par le TVI, f atteint $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, qu'on suppose > 0 (si $M \leq 0$, on remplace par le min). Il existe donc $u \in\,]a,b[$ tel que $f(u) = M$. On a alors

$$f'(u) = \lim_{x\downarrow u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{x\downarrow u} \frac{f(x)-M}{x-u} = \lim_{x\downarrow u} \frac{\leq 0}{\geq 0} \quad \leq 0 \text{ et}$$
$$f'(u) = \lim_{x\uparrow u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{x\uparrow u} \frac{f(x)-M}{x-u} = \lim_{x\uparrow u} \frac{\leq 0}{\leq 0} \quad \geq 0.$$

Donc $f'(u) = 0$. □

Théorème 5.7 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue, et dérivable sur* $]a,b[$*. Alors il existe* $u \in\,]a,b[$ *tel que* $f'(u) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*

Preuve. Application directe du théorème de Rolle, cf Exercices. □

Applications du Théorème des Accroissements finis:
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord) et dérivable sur $]a,b[$.

1) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \text{constante}$. En effet, $\Leftarrow$ est claire, et pour $\Rightarrow$, si $f \neq$ constante, on trouve $c < d$ tel que $f(c) \neq f(d)$. Le TAF donne alors $u \in\,]c,d[$ tel que $f'(u) = \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c} \neq 0$.
2) Si $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a,b[$, et si on a $f'(x) = g'(x)$, alors $f(x) = g(x) + C$. En effet, il suffit d'appliquer le 1) à $f - g$.
3) $\begin{matrix} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{matrix}$ $\forall x \in\,]a,b[\quad \Leftrightarrow \quad f$ est $\begin{matrix}\text{croissante} \\ \text{décroissante}\end{matrix}$ sur $[a,b]$.
4) $\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix}$ $\forall x \in\,]a,b[\quad \Rightarrow \quad f$ est $\begin{matrix}\text{strictement croissante} \\ \text{strictement décroissante}\end{matrix}$ sur $[a,b]$.

Remarque 5.6. Attention, $\Leftarrow$ du 4) est faux en général. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, donc f' n'est pas > 0 sur $\mathbb{R}$.

Définition de la fonction exponentielle (et logarithme):

Théorème 5.8. *Il existe une unique fonction* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ *et* $f(0) = 1$*.*

Preuve. Existence: plus tard ! Unicité: 2 étapes:

1) *La fonction* f *vérifie:* $f(x) \neq 0\, \forall x \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x)f(-x)$. On calcule: $h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = 0$, donc h est constante. Comme $h(0) = 1\cdot 1$, on trouve $h(x) = f(x)f(-x) = 1$, d'où $f(x) \neq 0$.
2) *Unicité.* Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une (autre) fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$, alors on pose $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ (bien définie par l'étape 1). On calcule $h'(x) = \dfrac{g'f - f'g}{f^2} = \dfrac{gf - fg}{f^2} = 0$, donc h est constante. Comme $h(0) = \frac{1}{1}$, on trouve $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow g(x) = f(x)$. □

Définition 5.6. Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, notée $\exp(x)$ (et e^x plus tard).

Propriétés de $\exp(x)$*:*

1) $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ (découle de la définition). Donc $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2) $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (cf preuve!)
3) exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, exp est continue et $\neq 0$, donc > 0 ou < 0. Comme $\exp(0) = 1$, on a $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
4) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En effet, fixons $y \in \mathbb{R}$ et posons $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. Alors $g'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$ et $g(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$. Par unicité, il suit $g(x) = \exp(x) \Leftrightarrow \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x) \Leftrightarrow \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. En effet, la seconde limite découlera de la première (changement de variable $y = -x$), et pour la première, on pose $g(x) = \exp(x) - x$. On a alors $g'(x) = \exp(x) - 1 > 0$ si $x > 0$ car exp est strictement croissante. Ainsi, dès que $x > 0$, g est strictement croissante et donc $\exp(x) > x \longrightarrow +\infty$.
6) $\exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818\dots$; en fait, on a $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (cf exercices).
   Il suit que $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e \cdot e = e^2$, et par récurrence que $\exp(n) = e^n$. En prenant les quotients, on montre que $\exp(-n) = e^{-n}$, puis les racines, que $\exp(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}}$.

Définition 5.7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x)$.

Remarque 5.7. $\exp\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est strictement croissante, donc injective. La propriété 5) montre qu'elle est surjective (sur $]0, +\infty[$). Elle est donc bijective!

Définition 5.8. Le **logarithme** est la réciproque de exp:

$$\begin{aligned} \log\colon]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) \quad (= \ln(x), \text{ autre notation}). \end{aligned}$$

Propriétés de $\exp(x)$*:*

1) $D(\log) =]0, +\infty[$ et $\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}$. De plus, $\log(1) = 0$, $\log \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ et on a $x = \exp(\log(x)) \Rightarrow 1 = \exp'(\log(x))\log'(x) = x\log'(x) \Rightarrow \log'(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 0$.
2) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. (Prendre exp des deux côtés!)
3) log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\downarrow 0} \log(x) = -\infty$. (Changement de variables $x = e^y$.)

Autres bases:

Définition 5.9. Pour $a > 0$, l'**exponentielle en base** a est

$$\begin{aligned} \exp_a\colon \mathbb{R} &\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto a^x = \exp_a(x) \overset{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x). \end{aligned}$$

Pour $a > 0$,$a \neq 1$, **le logarithme en base** a est la réciproque de $\exp_a$:

$$\begin{aligned} \log_a\colon]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad (\text{exercice facile}). \end{aligned}$$

Propriétés (cf exercices) :

- $(a^x)' = \log(a)a^x$, et $\log_a'(x) = \frac{1}{\log(a)x}$.

- a^x est strictement croissante (décroissante) si $a > 1$ ($a < 1$).
- $\log_a(b^x) = x \log_a(b)$.
- Changement de base: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

Remarque 5.8. Pour $u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a donc $x^u = \exp(\log(x)u)$, et donc $(x^u)' = \exp(\log(x)u)\frac{u}{x} = ux^{u-1}$.

Définition 5.10 (Fonctions trigo hyperboliques)**.**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Remarque 5.9. Comme pour les définitions de sin et cos, mais sans i.

Propriétés (cf exercices) :

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
- $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, de réciproque $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

Sem. 11
- $\cosh\colon [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est bij., de réciproque $\operatorname{arccosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$.

Théorème 5.9 (Bernoulli-L'Hospital (BH))**.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ où $A =]x_0 - d, x_0[\cup]x_0, x_0 + d[$ est un voisinage de x_0. Si*

$$1) \text{ “ } \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty} \text{ ”}, \quad \text{et} \quad 2) \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

alors $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

Preuve. Utilise le Théorème des accroissements finis généralisé (Exercice). □

Remarque 5.10. • Marche aussi avec $\lim\limits_{x\downarrow x_0}$, $\lim\limits_{x\uparrow x_0}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

- 2) $\Rightarrow$ dans un voisinage de x_0, f et g sont dérivables et $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$.

Exemples:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{BH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{\log(x)} \overset{BH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{px^{p-1}}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} px^p = +\infty$ si $p > 0$, et $= 0$ si $p \leq 0$. Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(2x)^{3/x^2} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\log(\cos(2x))\frac{3}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{3\log(\cos(2x))}{x^2}\right)$ par continuité de exp. En appliquant BH à la limite intérieure, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\log(\cos(2x))}{x^2} = 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\cos(2x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = -6$, donc la limite initiale vaut e^{-6}.

Remarque 5.11. Attention: si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors BH ne marche pas. Par exemple, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$ (en utilisant les deux gendarmes) mais $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x} \overset{BH}{\neq} \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1}$ n'existe pas.

Proposition 5.10 (Fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0)$, et on considère la fonction $h\colon I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \leq x_0 \\ g(x) & si\ x \geq x_0. \end{cases}$$

Alors h est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$, et dans ce cas, $h \in \mathcal{C}^1(I)$.

Preuve. On calcule la dérivée à gauche de h en x_0:

$$h'_{\text{gauche}}(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{BH}{=} \lim_{x \uparrow x_0} f'(x) = f'(x_0).$$

Le même argument donne $h'_{\text{droite}}(x_0) = g'(x_0)$. Ainsi, ces dérivées coïncident si et seulement si $f'(x_0) = g'(x_0)$. Dans ce cas, on a donc

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \leq x_0 \\ g'(x) & \text{si } x \geq x_0, \end{cases}$$

et h' est donc continue ailleurs qu'en x_0. Finalement, elle est aussi continue en x_0, car

$$\lim_{x \uparrow x_0} h'(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f'(x) = f'(x_0) = g'(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} g'(x) = \lim_{x \downarrow x_0} h'(x).$$

D'où $h \in \mathcal{C}^1(I)$. □

Remarque 5.12. • Cette proposition peut être utilisée récursivement !

- La preuve montre: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ si cette limite existe.

Exemple: La fonction $f(x) = \begin{cases} \sinh(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est

- continue en 0, car $\sinh(0) = 0 = \sin(0)$;
- dérivable en 0, et donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, car $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1 = \cos(0) = \sin'(0)$;
- de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ car $\sinh''(0) = \sinh(0) = 0 = -\sin(0) = \sin''(0)$;
- pas trois fois dérivable en 0, car $\sinh'''(0) = \cosh(0) = 1 \neq -1 = -\cos(0) = \sin'''(0)$.

5.3 Études de fonctions

Slides !

5.4 Application: convergence de suites définies par récurrence

Rappel: c'est une suite (a_n) définie par a_0 = valeur fixée, et $a_{n+1} = g(a_n)$ pour une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Remarque importante:* **Si** (a_n) converge, disons $a_n \longrightarrow \ell$, alors

$$\ell = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} g(a_n) \overset{(*)}{=} g\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) = g(\ell) \quad \Rightarrow \quad \ell \text{ est solution de } x = g(x),$$

où $(*)$ est vraie si g est continue. On supposera donc en général que g est continue, et même de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins sur un intervalle).

Exemple: On considère la suite (a_n) où $a_0 = \frac{1}{3}$, et $a_{n+1} = a_n^2 = g(a_n)$, où $g(x) = x^2$. Alors, les solutions de $x = g(x) = x^2$ sont 0 et 1, ce sont donc deux candidats pour la limite ℓ. On calcule quelques valeurs: $(a_n) = (a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}, a_2 = (\frac{1}{9})^2 = \frac{1}{81}, ...)$, la suite semble donc converger vers 0. En revanche, si $a_0 = 3$, alors $(a_n) = (a_0 = 3, a_1 = 3^2 = 9, a_2 = 9^2 = 81, \dots)$, et la suite semble diverger. Finalement, si $a_0 = -1$, alors $(a_n) = (-1, 1, 1, 1 \dots)$, et donc $a_n \longrightarrow 1$. Dans cet exemple simple, on peut montrer par récurrence que $a_n = a_0^{(2^n)}$, et donc que $a_n \longrightarrow 0$ si $|a_0| < 1$, $a_n \longrightarrow 1$ si $a_0 = \pm 1$, et (a_n) diverge si $|a_0| > 1$.

Dans le cas général, une étude de la fonction g peut nous aider: Si $a_0 \geq a$ et

$$a \leq g(x) \leq x \qquad \text{pour tout } x \geq a, \text{ alors}$$

- $a_1 = g(a_0) \geq a,\ a_2 = g(a_1) \geq a, \ldots$ et on montre facilement par récurrence que tous les termes a_n sont également $\geq a$, donc $\boxed{(a_n) \text{ est minorée,}}$
- $a_{n+1} = g(a_n) \leq a_n$, pour tout n, donc $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante.}}$

Ainsi, dans ce cas, la suite converge (donc vers un candidat ℓ) par décroissance minorée. On peut généraliser cela au cas des suites croissantes majorées.

Théorème 5.11 (Récurrences linéaires)**.** *Soit (a_n) la suite définie par $a_0 =$ valeur fixée, et $a_{n+1} = g(a_n)$ avec $g(x) = qx + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$. Alors (a_n) converge (vers l'unique solution ℓ de l'équation $x = g(x)$) si et seulement si $|q| < 1$ ou $a_0 = \ell$.*

Preuve. Si $0 \leq q < 1$, alors $\ell \leq g(x) \leq x$ pour tout $x \geq \ell$, la suite est donc décroissante et minorée, donc converge. Si $q > 1$, alors $g(x) > x$ pour tout $x \geq \ell$, la suite est donc croissante et non-majorée, donc diverge. Et si $q \leq 0$, on observe que la sous-suite $b_k = a_{2k}$ (resp. $c_k = a_{2k+1}$) est toujours $\geq \ell$ (resp. $\leq \ell$), ou l'inverse. Ces suites sont également définies par récurrences à l'aide de $g \circ g(x) = q^2x + (qb + b)$:

$$b_0 = a_0, \quad b_{k+1} = g \circ g(b_k), \qquad\qquad c_0 = a_1, \quad c_{k+1} = g \circ g(c_k).$$

Si $-1 < q < 0$ alors $g \circ g$ est linéaire avec $0 < q^2 < 1$, donc ces deux suites convergent vers ℓ (et a_n aussi) et si $q < -1$, alors les deux suites divergent (et a_n aussi). (Que se passe-t-il si $q = -1$?) $\square$

Exemple non-linéaire: $a_0 \in \mathbb{R}^*, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$ On a donc $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$, qui est continue sur son domaine et les candidats pour la limite sont donc les solutions de $g(x) = x$, ie $\pm\sqrt{3}$. Une étude de $g(x)$ et de $g(x) - x$ donne les informations suivantes:

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$g(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	?	$\searrow$	min	$\nearrow$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$g(x) - x$	$+$	0	$-$	?	$+$	0	$-$

Ainsi, si $a_0 \in \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$, on a $\sqrt{3} \leq g(x) \leq x$ dans cette région, donc la suite converge vers $\sqrt{3}$ par décroissance minorée. Si $a_0 \in \left]0, \sqrt{3}\right[$, comme $g(x) \geq \sqrt{3}$, $a_1 = g(a_0)$ sera dans la région précédente, donc la suite converge également vers $\sqrt{3}$. Et si $a_0 < 0$, la situation est inversée ; la suite a_n converge donc vers $-\sqrt{3}$.

5.5 Développements limités

Idée: Approximations de fonctions par des polynômes (ex: $\sin(x) \approx x$) mais *en gardant le contrôle sur l'erreur !*

Point de vue 1: Imitation des dérivées en x_0.

Définition 5.11 (Polynôme de Taylor)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ avec $I =$ intervalle ouvert $\ni x_0$. Le **polynôme de Taylor de f d'ordre n en** x_0 est l'unique polynôme $p_n(x)$ de degré $\leq n$ dont les dérivées en x_0 sont les mêmes que celles de f jusqu'à l'ordre n.

Exemple: $f(x) = \sin(x), x_0 = 0$. On a $p_1(x) = x = p_2(x)$ et $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$.
Formule:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k, \qquad \text{où} \qquad \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}.$$

Point de vue 2: Approximation autour de x_0.

Définition 5.12 (Développement limité)**.** Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I =$ intervalle ouvert $\ni x_0$. Alors f admet un **développement limité d'ordre** $n \in \mathbb{N}$ **(DL$_n$) en de** x_0 si

$$f(x) = \text{polynôme de degré} \leq n \qquad + \qquad \text{reste } r_n(x)$$

pour tout $x \in I$, où $r_n(x)$ vérifie l'une des conditions équivalentes:

- Pour tout $C > 0$, $|r_n(x)| \leq C|x - x_0|^n$ pour x assez proche de x_0,
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$,
- **Notation du cours:** $r_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$, où $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ est telle que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples:

- $\sin(x)$ admet un DL$_3$ en $x_0 = 0$ donné par $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$. En effet, la seule chose à montrer est que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On trouve une expression pour $\varepsilon(x)$ en l'isolant dans l'équation, et on applique trois foir Bernoulli-L'Hospital pour la limite:
$$\varepsilon(x) = \frac{\sin(x) - (x - \frac{1}{6}x^3)}{x^3} \quad \overset{\text{BH}^3}{\Rightarrow} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
- Comme $-\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) = x^2(\underbrace{-\tfrac{1}{6}x + x\varepsilon(x)}_{\longrightarrow 0}) = x^2\varepsilon(x)$, on peut utiliser le point précédent pour calculer les DL$_{2,1,0}$ en $x_0 = 0$ de $\sin(x)$:
$$\sin(x) = \underbrace{x + x^2\varepsilon(x)}_{\text{DL}_2} = \underbrace{x + x\varepsilon(x)}_{\text{DL}_1} = \underbrace{0 + \varepsilon(x)}_{\text{DL}_0}$$

Remarque 5.13. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, avec $I =$ intervalle ouvert $\ni x_0$.

- Si f admet un DL en x_0, alors il est unique. (Exercice).
- Si f est continue en x_0, alors f admet un DL$_0$ en x_0. La réciproque est vraie, si on suppose en plus que $\varepsilon(x_0) = 0$.
- Si f est continue en x_0, alors f admet un DL$_1$ en x_0 $\Leftrightarrow$ f est dérivable en x_0.

Equivalence des deux points de vue:

Théorème 5.12 (Formule de Taylor)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ avec $I =$ intervalle ouvert $\ni x_0$. Alors f admet un DL$_n$ en x_0 donné par*

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où $p_n(x)$ est le polynôme de Taylor de f d'ordre n en x_0.

Preuve. Bernoulli-L'Hospital n fois ! □

Remarque 5.14 (Estimation du reste $r_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)^n\varepsilon(x)$). On suppose que $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$. On a $r_n(x) = f(x) - p_n(x) = R(x_0)$, où

$$R(y) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x - y)^k.$$

On fixe x (et x_0) ; comme $R(x) = 0$, on a

$$r_n(x) = R(x_0) = R(x_0) - R(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{r_n(x)}{x_0 - x} = \frac{R(x_0) - R(x)}{x_0 - x} = R'(u)$$

pour un u entre x et x_0, par le TAF (appliqué à $R(y)$). Par récurrence sur n, on montre que $R'(u) = -f^{(n+1)}(u)\frac{(x-u)^n}{n!}$. En prenant les valeurs absolues, on trouve alors

$$\left|\frac{r_n(x)}{x - x_0}\right| \leq |f^{(n+1)}(u)| \cdot \frac{\overbrace{|x - u|^n}^{\leq |x - x_0|^n}}{n!} \quad \Rightarrow \quad |r_n(x)| \leq |f^{(n+1)}(u)| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n!}.$$

<u>*DL à connaitre (tous en $x_0 = 0$, obtenus grâce à la formule de Taylor):*</u>

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$ (DL_{2n+1} en 0).
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$ (DL_{2n} en 0).
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$ (DL_n en 0).
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$ (DL_n en 0).
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$ (DL_n en 0).

Application: Calculs de limites !

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (Vu en classe).
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2 + 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))}{x^4} = \frac{2}{4!} + \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = \frac{1}{12}$.
- $\lim_{x\to 0}(1 + 3x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{3x + 3x\varepsilon(3x)}{x}\right) =$
  $= \exp\left(3 + \lim_{x\to 0}\varepsilon(3x)\right) = e^3$.

<u>*Calculs de DL:*</u>

- Formule de Taylor: Marche toujours mais parfois un peu long.
- Tant qu'on écrit le reste, on peut tout faire sans risque d'erreur (sommes, produits, composition de DL).

Sem. 12

Exemples:

- DL_2 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$: On utilise le DL_2 de $\sin(x)$ et le DL_1 de $\cos(x)$:
$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &= (x + x^2\varepsilon_1(x)) \cdot (1 + x\varepsilon_2(x)) \\ &= x + x^2\big(\underbrace{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + x\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)}_{\longrightarrow 0}\big) = x + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$
- DL_3 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$:
$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &= (x - \tfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)) \\ &= x - \tfrac{2}{3}x^3 + x^3\big(\underbrace{\cdots}_{\longrightarrow 0}\big) = x - \tfrac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$
- DL_1 en $x_0 = 0$ de $f(x) = e^{\cos(x)}$: On combine les DL_1: $\cos(x) = 1 + x\varepsilon_1(x)$ et $e^x = 1 + x + x\varepsilon_2(x)$ pour trouver
$$e^{\cos(x)} = 1 + \cos(x) + \cos(x)\,\underbrace{\varepsilon_2(\cos(x))}_{\longrightarrow ???} = 2 \quad + \quad ???$$
  On voit déjà le problème: impossible de connaître $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(\cos(x))$; on ne pourra donc jamais trouver un DL comme ça.

Solutions:

(i) Réécrire l'expression pour avoir quelque chose qui $\to 0$ dans ε_1:

$$e^{\cos(x)} = e^{1+x\varepsilon_1(x)} = e\cdot e^{x\varepsilon_1(x)} = e\cdot\Big(1 + x\varepsilon_1(x) + x\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x\varepsilon_1(x))\Big)$$
$$= e + x\underbrace{\big(e\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x\varepsilon_1(x))\big)}_{\to 0} = e + x\varepsilon(x).$$

Ici cela fonctionne car $x\varepsilon_1(x) \to 0$, et donc $\varepsilon_2(x\varepsilon_1(x)) \to 0$.

(ii) Combiner le DL$_1$ en $x_0 = 0$ de $\cos(x)$ avec le DL$_1$ en $\boxed{x_0 = \cos(0) = 1}$ de e^x:

$$e^x = e + e(x-1) + (x-1)\tilde{\varepsilon}_2(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 1}\tilde{\varepsilon}_2(x) = 0 \qquad \text{(Formule de Taylor)}$$

D'où:

$$e^{\cos(x)} = e + e(\cos(x) - 1) + (\cos(x) - 1)\tilde{\varepsilon}_2(\cos(x))$$
$$= e + x\Big(\underbrace{e\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(x)\tilde{\varepsilon}_2(\cos(x))}_{\longrightarrow 0}\Big) = e + x\varepsilon(x).$$

Ici cela fonctionne car $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$, et donc $\lim_{x\to 0}\tilde{\varepsilon}_2(\cos(x)) = \lim_{y\to 1}\tilde{\varepsilon}_2(y) = 0$.

5.6 Séries de Taylor

Rappel: Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ avec $I =$ intervalle ouvert $\ni x_0$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \overbrace{(x-x_0)^n\,\underset{x\to 0}{\underbrace{\varepsilon(x)}_{\longrightarrow 0}}}^{r_n(x)}$$

Question: si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, a-t-on $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$? On prend la limite lorsque $n\to\infty$: Il faut donc que 1) la série converge, et 2) le reste $r_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 5.13. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $I =$ intervalle ouvert $\ni x_0$, la **série de Taylor de f centrée en** x_0 est la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Remarque 5.15.
- C'est une série entière ! (centre $= x_0$. Rayon de convergence $=$?).
- Cette série est définie pour tout f (même si $r_n(x)$ ne converge pas vers 0).
- Si $x_0 = 0$, on l'appelle aussi **série de MacLaurin**.

Exemples:

1) $f(x) = e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $x_0 = 0$. On a $e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \underbrace{x^n\varepsilon(x)}_{r_n(x)}$ (DL en 0). La série de Taylor est donc $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, qui converge pour tout $x\in\mathbb{R}$ (cf Chapitre 3). Il reste à voir que $r_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par la formule du reste (remarque après la formule de Taylor), on trouve un u entre 0 et x tel que

$$|r_n(x)| \le |f^{(n+1)}(u)|\frac{|x|^{n+1}}{n!} = e^u\frac{|x|^{n+1}}{n!} \le= e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{n!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainai, e^x est égal à sa série de Talor $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Le même argument marche pour $\sin(x)$ et $\cos(x)$, ainsi que pour $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$. On a donc:
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
Pour $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$, c'est pareil, mais sans le $(-1)^k$.

Remarque 5.16. Cela donne une raison pour la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$:
$$\begin{aligned} e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}}_{\text{indices pairs}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{indices impairs}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos(x) + i\sin(x). \end{aligned}$$

Proposition 5.13 (Dérivée de séries entières). *Si* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$, *alors*
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k+1) b_{k+1}}_{:=b'_k} (x-x_0)^k$$
et les rayons de convergence sont les mêmes.

Conséquences de la proposition:

- On peut *définir* $e^x = \exp(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: En effet $\exp(0) = 0$ et
$$\exp'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$
C'est donc (l'unique) solution de $f' = f, f(0) = 1$.
- Si $f(x)$ est une série entière, i.e. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$, on dérive la série pour trouver:
$$f(x_0) = b_0, \quad f'(x_0) = b_1, \quad \ldots \quad f^{(k)}(x_0) = k! \cdot b_k \quad \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.}$$
Donc cette série est déjà la série de Taylor de f.

Retour aux exemples:

3) $f(x) = \frac{1}{1-x} \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$. On a vu que $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ si $|x| < 1$. C'est une série entière, et c'est donc la série de Taylor de $f(x)$ centrée en $x_0 = 0$. Ainsi, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est égale à sa série de Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ pour tout $x \in]-1,1[$. Attention: $f(-1) = \frac{1}{2} \neq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ car cette série ne converge pas !

4) $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \underset{x\to 0}{\underbrace{\varepsilon(x)}_{\longrightarrow 0}}$ (DL en 0). La série de Taylor est donc

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, de rayon de convergence $r = 1$. A l'aide de la proposition, on calcule

$$\begin{aligned}\left(\log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)' &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} k x^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-(-x)} - \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k = 0.\end{aligned}$$

Donc $\log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = C$, et en remplaçant $x = 0$, on trouve $C = 0$. Ainsi, $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Par prolongement par continuité, c'est encore vrai pour $x \in]-1, 1]$, d'où

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

5) Contre-exemple à f = série de Taylor de f: On considère

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, et on calcule $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, ce qui implique $f'(0) = 0$ (cf Remarque 5.12). De manière analogue, on montre alors par récurrence que $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot p(1/x)$ si $x \neq 0$, où p est un polynôme, et que $f^{(n)}(0) = 0$. Cela montre que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la série de Taylor de f est donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$. Ainsi, dès que $x \neq 0$, $f(x)$ n'est pas égal à sa série de Taylor en $x_0 = 0$.
La raison est que le DL est $f(x) = 0 + r_n(x)$, avec reste $r_n(x) = e^{-1/x^2}$, qui ne tend pas vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Remarque 5.17. Donc $\sin(x)$ et $\sin(x) + e^{-1/x^2}$ ont la même série de Taylor !

Chapitre 6: Intégrales

6.1 Primitives et intégrales

Définition 6.1. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ (continue) où $I =$ intervalle. Une **primitive** de f est une fonction dérivable $F\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque 6.1. Si F, G sont deux primitives de f, alors $(F-G)' = f - f = 0$, et donc $F(x) = G(x) + C$.

Notation: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \{\text{primitives de } f\} = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, où F est une primitive de f.

Abus de notation: $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$

Remarque 6.2. L'intégrale $\displaystyle\int f(x)\,dx$ s'appelle l'**intégrale indéfinie** de f.

Changeons d'angle de vue: Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, quelle est l'aire sous la courbe du graphe de f ? Pour approximer l'aire, on commence par choisir $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ (c'est une partition de $[a,b]$). On obtient:

- **Approx. 1 (Inférieure):** Aire $\approx$ aire des rectangles *sous* la courbe:
$$\text{Approx. } 1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$
- **Approx. 2 (Supérieure):** Aire $\approx$ aire des rectangles *sur* la courbe:
$$\text{Approx. } 2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Remarque 6.3. On a: Approx. 1 $\leq$ Aire $\leq$ Approx. 2.

Définition 6.2. Une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est **intégrable** (au sens de Riemann) si
$$\sup\{\text{Approx. } 1\} = \inf\{\text{Approx. } 2\} = A \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = A$, c'est l'**intégrale définie** de f sur $[a,b]$.

Convention: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque 6.4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ aire *signée* sous la courbe.

Théorème 6.1. *Si* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* continue, *ou* monotone *(ou bornée et continue partout sauf en un ensemble fini de points), alors f est intégrable (au sens de Riemann).*

Preuve. Technique ! (Monotone: exercice.) □

Proposition 6.2 (Premières propriétés)**.** *Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables. Alors*

1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ *pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Si $a < u < b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^u f(x)\,dx + \int_u^b f(x)\,dx$.

3) Si $f(x) \leq g(x)$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve. Technique ! □

Sem. 13

Remarque 6.5. • Cela définit l'**intégrale de Riemann**. Il en existe d'autres: Intégrale de Lebesgue, intégrale d'Itô, ...

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$.
- Comme $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, le point 3) de la proposition implique

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Théorème 6.3 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $u \in \,]a,b[$ tel que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(u)(b-a)$.

Preuve. Soit $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \displaystyle\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$. Comme $\displaystyle\int_a^b m\,dx = m(b-a)$, en divisant par $(b-a)$, on obtient $m \leq y \leq M$, où $y = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Par le TVI, f atteint y: il existe donc $u \in \,]a,b[$ tel que $f(u) = y$. □

Remarque 6.6. Donc $f(u) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Lien entre $\displaystyle\int$ et $\displaystyle\int_a^b$:

Théorème 6.4 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1) La fonction

$$\begin{aligned} G\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

est une primitive de f sur $[a,b]$.

2) Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Preuve. 1) On a

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(u)\cdot h = \lim_{u\to x} f(u) = f(x),$$

où l'on a utilisé le théorème de la moyenne pour trouver $u \in]x, x+h[$; donc $u \to x$ lorsque $h \to 0$.

2) On a $F(x) = G(x)+C$ et donc $F(b)-F(a) = G(b)-G(a)+C-C = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - 0$.

□

Notation: $\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$.

6.2 Calcul d'intégrales

Exemples faciles:

1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi = -\cos(\pi) - -\cos(0) = 2$. Mais $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - -\cos(0) = 0$ (l'aire négative compense l'aire positive).

2) $\displaystyle\int (3x+1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + x + C$.
$\displaystyle\int a^x\,dx = \int e^{\log(a)x}\,dx = \frac{1}{\log(a)} e^{\log(a)x} + C = \frac{a^x}{\log(a)} + C.$

3) $\displaystyle\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + C$. Ex: $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$

4) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$. Ex: $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\log|\cos(x)| + C$.

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 6.5 (Changement de variable / Substitution)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi\colon [u,v] \to [a,b]$, avec $\varphi \in \mathcal{C}^1([u,v])$ et $\varphi(u) = a, \varphi(v) = b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Preuve. Soit F une primitive de f et $G(t) = F(\varphi(t))$. Alors $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(v)) - F(\varphi(u)) = G(v) - G(u) = \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

□

Remarque 6.7. Si φ est bijective, alors $F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$ et donc $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ évalué en $t = \varphi^{-1}(x)$.

Exemples:

- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. On considère $\varphi\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1]; \varphi(t) = \sin(t)$. On a $\varphi(0) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = a$ et $\varphi'(t) = \cos(t)$. Écrit plus rapidement: $x = \sin(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos(t) \Rightarrow dx = \cos(t)dt$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$

- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. On pose $\varphi\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]; \varphi(t)=\sin(t)$. Alors φ est bijective, et donc $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin(2t) + C = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}\sin(t)\sqrt{1-\sin(t)^2}$ évalué en $t=\arcsin(x)$. Donc l'intégrale vaut $\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

Remarque 6.8. On peut aussi exprimer t en fonction de x. Exemple: $\int e^{x^2} x\,dx$. On substitue $t=x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$ pour trouver $\int e^t \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Comment choisir *la* bonne substitution ? Difficile en général. Exemples

- $\int e^{x^2} x\,dx$, $\int \sin(x^2)x\,dx$: $t = x^2 =$ "ce qu'il y a dedans".
- $\int \dfrac{x}{1+x^2}\,dx$, $\int \dfrac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3}\,dx$: $t =$ "ce qu'il y a dessous, ou dedans dessous".
- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$: $x = \sin(t)$ ou $\sinh(t) =$ "ce qui forme un $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ou $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$".
- Fonctions rationnelles en $\sin, \cos$: $\int \dfrac{1}{\sin(x)}\,dx, \int \dfrac{1}{\sin^4(x)}\,dx$. Ici, on substitue $t = \tan(x)$ "si les racines disparaissent" (et donc $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$) et $t = \tan(\frac{x}{2})$ sinon (et donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$).
  Exemples:
  - $\int \dfrac{1}{\sin^4(x)}$. On substitue $t=\tan(x)$ pour trouver $\int \dfrac{(1+t^2)^2}{t^4}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}\,dt = \int t^{-4} + t^{-2}\,dt = \dfrac{t^{-3}}{-3} + \dfrac{t^{-1}}{-1} + C = -\dfrac{1}{3\tan^3(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)} + C$
  - $\int \dfrac{1}{\sin(x)}$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$ pour trouver $\int \dfrac{1+t^2}{2t}\cdot\dfrac{2}{1+t^2}\,dt = \int \dfrac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log|\tan(\frac{x}{2})| + C$.

Proposition 6.6 (Intégration par parties)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, $g \in \mathcal{C}^1([a,b]]$ et F une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\uparrow}\,\underbrace{g(x)}_{\downarrow}\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Preuve. On a $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$ et donc $\int_a^b fg\,dx = \int_a^b (Fg)'\,dx - \int_a^b Fg'\,dx = \big[Fg\big]_a^b - \int_a^b Fg'\,dx$. □

Remarque 6.9. Cela montre au passage que $\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$.

Exemples:

1) $\int \underbrace{e^x}_{\uparrow}\,\underbrace{x}_{\downarrow}\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C.$

2) $\int \log(x)\,dx = \int \underbrace{\log(x)}_{\downarrow}\underbrace{1}_{\uparrow}\,dx = \log(x)x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\log(x) - x + C.$

3) $\int \cos(x)^2\,dx = \int \underbrace{\cos(x)}_{\uparrow}\underbrace{\cos(x)}_{\downarrow}\,dx = \sin(x)\cos(x) + \int \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)}\,dx = \sin(x)\cos(x) +$ $x - \int \cos(x)^2\,dx$. Ainsi, si $I = \int \cos(x)^2\,dx$, on a $I = \sin(x)\cos(x) + x - I$, d'où $I = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x)) + C$.

4) (Intégration par récurrence)

$$
\begin{aligned}
A_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,dx &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(x)}_{\uparrow}\underbrace{\cos^{2n-1}(x)}_{\downarrow}\,dx \\
&= \Big[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)(2n-1)\cos^{2n-2}(x)(-\sin(x))\,dx \\
&= 0 + (2n-1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)}\cos^{2n-2}(x)\,dx \\
&= (2n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)}(x)\,dx - (2n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,dx \\
&= (2n-1)A_{n-1} - (2n-1)A_n.
\end{aligned}
$$

Ainsi $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$, d'où $A_n = \frac{2n-1}{2n}A_{n-1}$ et $A_0 = \frac{\pi}{2}$. Cela permet de calculer tous les A_n récursivement.

Intégration de fonctions rationnelles: $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x), q(x) =$ polynômes.

Building Blocks:

(i) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$. Donc, en substituant $u = ax + b$, on a

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C.$$

(ii) $\int \frac{1}{x^k}\,dx = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} + C$. Donc, en substituant $u = ax + b$, on a

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

(iii) $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$. Donc, pour $p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, on peut compléter le carré:

$$ax^2 + bx + c = a\Big((x + \tfrac{b}{2a})^2 + \underbrace{\tfrac{-\Delta}{4a^2}}_{=d^2}\Big) = ad^2\Big(\big(\underbrace{\frac{x + \frac{b}{2a}}{d}}_{=u}\big)^2 + 1\Big).$$

Ainsi, cette substitution donne:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{ad}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{ad}\arctan\Big(\frac{x + \frac{b}{2a}}{d}\Big) + C$$

(iv) Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ on a $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{p(x)}\,dx - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{p(x)}\,dx =$ $\frac{1}{2a}\log|ax^2 + bx + c| + \text{(iii)} + C$.

(v) Pour $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$, on substitue $u = ax^2+bx+c$, pour trouver

$$\int u^{-k}\,du = \frac{1}{1-k}u^{1-k} + C = \frac{1}{1-k}(ax^2+bx+c)^{1-k} + C.$$

(vi) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \ldots$ Formule par récurrence (cf exercices).

A l'aide de (i) - (vi), on peut intégrer tout $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ à l'aide de la décomposition en éléments simples. Méthode:

1) Si $\deg(p) \geq \deg(q)$, division polynomiale ! Exemple: $\displaystyle\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}\,dx = \int \frac{3(x^4-x^3-x+1)}{x^4-x^3-x+1} + \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1}\,dx = 3x + \int \frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1}\,dx.$

2) Factoriser $q(x)$ en produit d'irréductibles et décomposer:

pour chaque facteur	$x-u$	$(x-u)^k$
$\dfrac{p(x)}{q(x)} =$	$\dfrac{A}{x-u}$	$\dfrac{A_1}{x-u} + \dfrac{A_2}{(x-u)^2} + \cdots + \dfrac{A_k}{(x-u)^k}$
pour chaque facteur	(ax^2+bx+c)	$(ax^2+bx+c)^k$
	$\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \dfrac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$

Exemple: $q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$. On décompose:

$$\frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2-2B+C)x^2 + (A_2+B-2C)x + (-A_1+A_2+C)}{x^4-x^3-x+1}.$$

En comparant les coefficients, on trouve le système d'équations

$$\begin{cases} A_1 + B &= 3 \\ A_2 - 2B + C &= 0 \\ A_2 + B - 2C &= 3 \\ -A_1 + A_2 + C &= 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1, A_2 = 3, B = 2, C = 1.$$

Donc

$$\frac{3x^3+3x+3}{x^4-x^3-x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

3) Intégrer les éléments simples ! Exemple: $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1| + C$, $\displaystyle\int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{-3}{x-1} + C$, $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \log|x^2+x+1| + C$. Ainsi:

$$\int \frac{3x^4+6}{x^4-x^3-x+1}\,dx = 3x + \log|x-1| + \frac{-3}{x-1} + \log(x^2+x+1) + C.$$

6.3 Intégrales généralisées / impropres

On a vu que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire (signée) sous la courbe. On aimerait généraliser cela à $f\colon\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ et $f\colon\,]-\infty,\infty[\, \to \mathbb{R}$.

Exemples: $\int_0^1 \log(x)\,dx = ?$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = ?$
Problème: L'Approx. 1 ou l'Approx. 2 est toujours $\pm\infty$. Solution: Limites !

Définition 6.3. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue, où $I =$ intervalle.

1) Si $I = [a, b[$ (avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), alors $\int_a^{b^-} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{u \uparrow b} \int_a^u f(x)\,dx$.
2) Si $I =]a, b]$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$), alors $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{u \downarrow a} \int_u^b f(x)\,dx$.
3) Si $I =]a, b[$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), alors
$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{a^+}^{w} f(x)\,dx + \int_w^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{u \downarrow a} \int_u^w f(x) + \lim_{v \uparrow b} \int_w^v f(x)\,dx,$$
où $w \in]a, b[$ est arbitraire.

Remarque 6.10. • Ce sont des **intégrales généralisées/impropres**.
• L'intégrale **converge** si la (*les !*) limite existe $\in \mathbb{R}$, et elle **diverge** sinon.
• Pour 3), on peut montrer que le résultat est indépendant du w choisi.

Notation: $\int_a^{+\infty^-} = \int_a^{+\infty}$, $\int_{-\infty^+}^{b} = \int_{-\infty}^{b}$. Exemples:

1) $\int_{0^+}^1 \log(x)\,dx = \lim_{u \downarrow 0} \int_u^1 \log(x)\,dx = \lim_{u \downarrow 0} \Big[x\log(x) - x\Big]_u^1 = \lim_{u \downarrow 0} \Big(-1 - u\log(u) - u\Big) =$
$-1 - \lim_{v \to +\infty} \frac{\log(1/v)}{v} = -1 + \lim_{v \to +\infty} \frac{\log(v)}{v} \stackrel{\text{BH}}{=} -1 + 0 = -1.$
2) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{-x}\,dx = \lim_{u \to +\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_0^u = \lim_{u \to +\infty} (1 - e^{-u}) = 1.$
3) Pour $r > 0$, on a $\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } r \leq 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1. \end{cases}$ (Vu en classe.)

Exercice: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \leq 1 \\ \frac{1}{r-1} & \text{si } r > 1. \end{cases}$

4)
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{u \to -\infty} \Big[\arctan(x)\Big]_u^0 + \lim_{v \to +\infty} \Big[\arctan(x)\Big]_0^v \\ &= 0 - \lim_{u \to -\infty} \arctan(u) + \lim_{v \to +\infty} \arctan(v) - 0 = -\,-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Remarque 6.11. **<u>Si</u>** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge (i.e. si les **deux** limites existent $\in \mathbb{R}$) alors cette intégrale vaut $\lim_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} f(x)\,dx$ (c'est la **valeur principale de Cauchy** de l'intégrale).

Mais attention:

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx = \lim_{u \to -\infty} \frac{-u^2}{2} + \lim_{v \to +\infty} \frac{v^2}{2} = -\infty + \infty$, donc l'intégrale diverge. En revanche, sa valeur principale de Cauchy existe et vaut $\lim_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} x\,dx = \lim_{u \to +\infty} \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{-u}^{u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{2} = 0$. Ce **n'est donc pas** la valeur de l'intégrale.

Proposition 6.7 (Comparaison d'intégrales)**.** *Soient* $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ *continues telles que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in [a, b[$. *Alors*

1) $\displaystyle\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ *converge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ *converge ;*

2) $\displaystyle\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ *diverge* $\Leftarrow \displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ *diverge.*

Preuve. Théorème du gendarme seul ! □

Remarque 6.12. Marche aussi avec $\displaystyle\int_{a^+}^{b}$ et $\displaystyle\int_{a^+}^{b^-}$.

Exemple: $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}\,dt$ converge par comparaison. En effet, pour $t \in [0, 1[$, on a $t^3 \leq t \Rightarrow 1 - t^3 \leq 1 - t \Rightarrow \sqrt{1-t^3} \geq \sqrt{1-t} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ et en substituant $x = 1 - t$, on trouve $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ qui converge.

Proposition 6.8 (Comparaison intégrale/série)**.** *Soit* $f\colon [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction positive* ($f(x) \geq 0$)*, continue et décroissante (pour* x *assez grand). Alors*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \quad \begin{array}{l}\textit{converge}\\ \textit{diverge}\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \begin{array}{l}\textit{converge}\\ \textit{diverge.}\end{array}$$

Preuve visuelle. Vue en classe. □

Exemples:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow p > 1$.
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p}\,dx$. En substituant $u = \log(x)$, cette intégrale vaut $\displaystyle\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{e^u \cdot u^p} e^u du = \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^p}\,dx$ qui converge $\Leftrightarrow p > 1$. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$ converge si et seulement si $p > 1$.

En particulier, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ diverge, mais $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)^2}$ converge !