Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

(a) En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(x^2+2x+2\right)=5.$$

(b) On utilise la formule $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ avec $a=\sqrt[3]{x}$ et $b=2$ pour obtenir

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x}-2)((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to8}\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{12}.$$

(c) En utilisant que $\cos(2x)=\cos(x)^2-\sin(x)^2=1-2\sin(x)^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}&=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin(x)^2}{\sin(x^2)}=-2\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right)\\&=-2\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin(x^2)}}_{=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin(y)}}=-2\cdot1^2\cdot1=-2.\end{aligned}$$

(d) Comme $1-x^2=(1-x)(1+x)$, on a

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

(e) On a

$$\lim_{x\to0}\sin(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot x=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}x=1\cdot0=0.$$

(f) En utilisant la formule $\sin(a+h)=\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\sin(a+h)&=\lim_{h\to0}\sin(a)\cos(h)+\lim_{h\to0}\cos(a)\sin(h)\\&=\sin(a)\cdot\lim_{h\to0}\cos(h)+\cos(a)\lim_{h\to0}\sin(h)=\sin(a).\end{aligned}$$

(g) En faisant le changement de variables $h=x-a$, et en utilisant une formule trigonométrique, on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}&=\lim_{h\to0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}\\&=\cos(a)\lim_{h\to0}\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(a)\lim_{h\to0}\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

En multipliant par $\cos(h)+1$ en haut et en bas, on trouve

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)^2}{h^2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h}{\cos(h)+1}=-1^2\cdot 0.$$

Donc comme $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$, on trouve que

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=-\sin(a).$$

Alternativement, on peut utiliser une autre formule trigonométrique pour trouver

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{-2\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}\\&=-\left(\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right)\\&=-\left(\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\right)\cdot\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}\right)=-\sin(a)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables $h=\frac{x+a}{2}-a$ et le point (f), et le changement de variables $y=\frac{x-a}{2}$.

(h) En multipliant par h^2/h^2, on obtient $\lim_{h\to 0}\frac{1-1/h^2}{1+1/h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-1}{h^2+1}=-1$.

(i) Pour tout $x\neq 0$, on a $-x^2\leq x^2\sin\left(\frac{1}{x^4}\right)\leq x^2$. Comme $\lim_{x\to 0}-x^2=0=\lim_{x\to 0}x^2$, le théorème des deux gendarmes implique donc que $\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x^4}\right)=0$.

(j) La fonction $f\colon[0,\pi]\to[-1,1]$ donnée par $f(x)=\cos(x)$ est strictement monotone et bijective. Comme $\lim_{x\to 0}f(x)=1$, et $f^{-1}=\arccos$, il suit que $\lim_{x\to 1}\arccos(x)=0$. En faisant un changement de variables $y=9x^2$, on trouve donc

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\arccos(9x^2)=\lim_{y\to 1}\arccos(y)=0.$$

Solution 2.
Soit $\varepsilon>0$. On pose $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{7},1\}$, de sorte que $\delta\leq\frac{\varepsilon}{7}$ et $\delta\leq 1$. Alors, dès que $|x-3|\leq\delta$, on a

$$\begin{aligned}|x^2-9|&=|x-3|\cdot|x+3|=|x-3|\cdot|x-3+6|\\&\leq|x-3|\cdot\Big(|x-3|+|6|\Big)\leq\delta\cdot\Big(\delta+6\Big)\leq\frac{\varepsilon}{7}\Big(1+6\Big)\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon>0$ était arbitraire, cela montre que $\lim_{x\to 3}x^2=9$.

Solution 3.

(a) On peut simplifier la fraction et trouver la limite

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{2x}-\frac{x}{2x}}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x(x+2)}=-\frac{1}{16}.$$

(b) On multiplie et divise par les conjugués:

$$\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}\frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2}\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}=\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}$$

On a donc
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

(c) On calcule $\lim\limits_{x\downarrow 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\downarrow 3}\dfrac{x-3}{x-3}=1$ et $\lim\limits_{x\uparrow 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\uparrow 3}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=-1.$
Comme les limites ne coïncident pas, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$ n'existe pas.

On peut aussi considérer les suites $a_n=3+\frac{1}{n}$ et $b_n=3-\frac{1}{n}$ (pour $n\in\mathbb{N}^*$), et constater que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, mais que

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=1\neq -1=\lim_{n\to\infty}f(b_n).$$

Donc la limite n'existe pas.

(d) Commençons par remarquer que pour tout $x\neq\pm 2$,

$$\frac{5x-6-x^2}{4-x^2}=\frac{-(x-2)(x-3)}{-(x-2)(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}$$

On a donc
$$\lim_{x\to 2}\frac{5x-6-x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}.$$

(e) On a

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x-6-x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x-3}{x+2}=\lim_{y\to 0}\frac{y-5}{y}=\lim_{y\to 0}\left(1-\frac{5}{y}\right).$$

(changement de variables $y=x+2$). En prenant la suite $a_n=\frac{1}{n}$, on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, mais

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}(1-5n)=-\infty,$$

et n'existe donc pas dans $\mathbb{R}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x-6-x^2}{4-x^2}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

(f) Comme $\lim_{x\to\alpha} \frac{\tan^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}\right)^2$ (changement de variables $x \to x-\alpha$ et propriétés des limites), et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1\cdot 1 = 1,$$

on trouve

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\tan^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2} = 1^2 = 1.$$

Solution 4.

(a) On peut prendre $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, ou bien $f(x) = x^3$ (car $|x^3| = |x|^3 \leq |x|^2 = x^2$ dès que $|x| < 1$).

(b) Ici, $\frac{1}{2}x^2$ ne marche plus, mais $f(x) = x^3$ marche encore:

$$|f(x)| = |x|^3 = x^2|x| \leq Cx^2 \Leftrightarrow x^2(|x|-C) \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq C.$$

Ainsi, $|f(x)| \leq Cx^2$ pour tout x dans le voisinage $]0-C, 0+C[$ de $x_0 = 0$.

(c) La limite vaut 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage de 0 où

$$|f(x)| \leq \varepsilon x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{|f(x)|}{x^2} = \left|\frac{f(x)}{x^2}\right| \leq \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que $\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right| = 0$, d'où $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 0$.

(d) On a:

Pour tout $C > 0$, il existe un voisinage de $x_0 = 0$ où $|f(x)| \leq C|x|^k$.

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = x^k\,\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x)$ est une fonction telle que $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

La première équivalence s'obtient en posant $C = \varepsilon$, en explicitant le voisinage (avec δ), et en observant que $\lim_{x\to 0}(...) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|...| = 0$, et la seconde équivalence s'obtient directement en posant $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{x^k}$.

Solution 5.

(a) On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} \overset{y=2x}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

où la première égalité vient du fait que $x \neq 0$ et la dernière à été montrée en cours. Comme $f(0) = 2 \neq 1$, la fonction n'est pas continue en $x = 0$.

(b) On a montré en cours que $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Il suit que $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas, et f n'est donc pas continue en $x = 0$.

(c) En multipliant par $1+\cos(x)$ en haut et en bas, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}\\ &= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0),$$

donc f est continue en 0.

(d) On a $-x \leq x\sin(\frac{1}{x}) \leq x$. Comme $\lim_{x\to 0} -x = 0 = \lim_{x\to 0} x$, on conclut par le Théorème des deux gendarmes que $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

et f n'est donc pas continue en 0.

Solution 6.
Soit $f(x) = \dfrac{|x-1|}{|x|-1}$. Alors:

- ☐ $f(x)$ possède un prolongement par continuité en $x=1$ et en $x=-1$.
- ☐ $f(x)$ possède un prolongement par continuité en $x=1$ mais pas en $x=-1$.
- ☐ $f(x)$ possède un prolongement par continuité en $x=-1$ mais pas en $x=1$.
- ■ $f(x)$ ne possède pas de prolongement par continuité.

On vérifie que la limite n'existe ni en $x=-1$ (car $|f(x)|\to\infty$) ni en $x=1$ (car la limite à gauche et à droite ne coïncident pas).

Solution 7.
Pour $\sin(x)$, cela découle du 1(f) (ou l'on montre que $\lim_{h\to 0}\sin(a+h) = \sin(a)$), avec le changement de variables $x = a+h$ (en effet, on obtient alors $\lim_{x\to a}\sin(x) = \sin(a)$). Pour $\cos(x)$, on peut soit le montrer directement (comme pour $\sin(x)$), soit utiliser le 1(g) pour trouver

$$\lim_{x\to a}\cos(x)-\cos(a) = \lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a) = -\sin(a)\cdot 0 = 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to a}\cos(x) = \cos(a) + \lim_{x\to a}(\cos(x)-\cos(a)) = \cos(a)+0 = \cos(a).$$

Pour $\tan(x)$, c'est une simple application du quotient de limites. Et pour les fonctions $\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$, cela suit de la proposition sur les limites de fonctions réciproques vues en cours.

Plus précisément, pour $\arcsin(x)$, on considère $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]; x \mapsto \sin(x)$, de sorte que $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$. La fonction f est strictement monotone, et comme son image est $[-1,1]$, arcsin est défini en tout voisinage de $v \in]-1,1[$, et en un voisinage à gauche de 1 et à droite de -1. La proposition du cours donne alors

$$\lim_{x\to v} \arcsin(x) = \arcsin(v), \quad \lim_{x\downarrow -1} \arcsin(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\uparrow 1} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Cela montre la continuité (jusqu'au bord) de $\arcsin(x)$.