

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

- (a) La suite converge vers 0, donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) On calcule quelques valeurs de la suite: $(a_n) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots)$. Ainsi, pour tout n , on a $\{a_{\geq n}\} = \{1, -\frac{1}{2}\} \Rightarrow \sup\{a_{\geq n}\} = 1$ et $\inf\{a_{\geq n}\} = -\frac{1}{2}$ d'où $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- (c) Pour $n_k = 2k$, on a $a_{n_k} = (1 + \frac{1}{2k})^{2k} \rightarrow e$ (car c'est une sous-suite de $(1 + \frac{1}{n})^n$ qui converge vers e , cf cours). Pour $n_k = 2k+1$, on a $a_{n_k} = (1 - \frac{1}{2k+1})^{2k+1} \rightarrow \frac{1}{e}$ (car c'est une sous-suite de $(1 - \frac{1}{n})^n$ qui converge vers $\frac{1}{e}$, cf exercice précédent). On se convainc que ces limites sont les plus grandes/les plus petites possibles (toute autre sous-suite est une sous-suite de ces sous-suites!). On trouve donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = e$.
- (d) On remarque que $\cos(\pi n) = (-1)^n$ et $\cos(\frac{\pi n}{2})$ vaut $(-1)^m$ si $n = 2m$ est pair, et 0 si n est impair. Donc, a_n prend les valeurs suivantes:

$$n \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2}+1 \end{array} \right| = \frac{2}{3} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{2}-1 \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 3 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 4 \\ \frac{2}{3} \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 5 \\ -2 \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 7 \\ -2 \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 8 \\ \frac{2}{3} \end{array} \right| = -2 \quad \left| \begin{array}{c} 9 \\ -2 \end{array} \right| = \dots$$

Il suit que $\{a_{\geq n}\} = \{-2, \frac{2}{3}\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_{\geq n}\} = -2 \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_{\geq n}\} = \frac{2}{3}.$$

- (e) Par définition de $[x]$, $0 \leq x - [x] \leq 1$, donc $0 \leq a_n < 1$. Pour $n_k = k^2$, on a $a_{n_k} = k - k = 0 \rightarrow 0$, d'où $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k^2} = 0$. Et pour $n_k = k^2 - 1$, on remarque que $[\sqrt{k^2 - 1}] = k - 1$, et donc $a_{n_k} = \sqrt{k^2 - 1} - (k - 1)$. Cette suite converge vers 1 (cf S5E3(b)(i), ou S4E6(j)), et on a donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k^2-1} = 1$.

Solution 2.

- (a) Vrai. On a $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$, et donc $|a_n - 0| \leq \varepsilon$ si et seulement si $||a_n| - 0| \leq \varepsilon$. En contemplant la définition de "converger vers 0", on conclut que $a_n \rightarrow 0$ si et seulement si $|a_n| \rightarrow 0$.
- (b) Faux. Prendre $a_n = 1$ pour tout n
- (c) Faux. Prendre $a_n = n$.
- (d) Vrai. C'est la définition de convergence (cas général) vue en cours.
- (e) Faux. Prendre par exemple $a_n = (n - 10)^2$.

- (f) Faux. Prendre $a_n = 2n$ et $b_n = n$.
 (g) Faux. Prendre $a_n = n$ et $b_n = 0$.
 (h) Vrai. Posons $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \ell_2$. Pour n assez grand, $b_n \neq 0$ et donc $a_n = \frac{a_n b_n}{b_n}$,
 d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\ell_2}{\ell}.$$

- (i) Vrai. On a

$$0 \leq |a_n| \leq \sup\{|a_{\geq n}|\}.$$

La suite à droite converge vers 0 (définition de \limsup) et donc $|a_n| \rightarrow 0$ par le théorème des deux gendarmes.

- (j) Faux. Prendre $a_n = 1 + (-1)^n$. La suite vaut alors $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$, donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, mais (a_n) diverge (car $(-1)^n$ diverge).

Solution 3.

- (a) Les sommes partielles sont

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$$

car $|q| < 1$, d'où $|q|^{n+1} \rightarrow 0$ (suite géométrique de raison < 1) et ainsi $q^{n+1} \rightarrow 0$.

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

- (b) Si $|q| \geq 1$, le terme général q^n ne tend pas vers zéro, donc la série diverge.

Solution 4.

- (a) Si $p > 1$, on utilise la même astuce que pour le cas $p = 2$ (vu en cours). Si S_n dénote la n -ième somme partielle, alors (S_n) est croissante (car $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^p} \geq S_n$). De plus, en séparant les termes pairs et impairs, on a

$$\begin{aligned} S_n \leq S_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots + \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^p} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^p} \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^p} = 1 + 2^{1-p} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \\ &\leq 1 + 2^{1-p} S_n. \end{aligned}$$

d'où $(1 - 2^{1-p})S_n \leq 1$. Comme $p > 1$, on a $2^{1-p} < 1$ et le facteur $(1 - 2^{1-p})$ est positif. On trouve donc l'inéquation $S_n \leq \frac{1}{1 - 2^{1-p}}$, et (S_n) est majorée. Elle converge donc par croissance majorée, et la série aussi.

- (b) Si $p \leq 1$, la série diverge par comparaison: on a $k^p \leq k$ et donc $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$. Ainsi $a_k \geq \frac{1}{k}$ et la série diverge car $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

Solution 5.

(a) La série converge par comparaison. En effet, $0 \leq \frac{1}{k+2^k} \leq \frac{1}{2^k}$, donc la série

converge car $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge (série géométrique avec $|q| = \frac{1}{2} < 1$).

(b) La série converge: On utilise le critère de Cauchy / de la racine:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1.$$

(c) La série converge: On utilise le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)43^n}{3^{n+1}n^4} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

(d) La série converge: On utilise le critère de Leibniz (séries alternées). En effet, a_n est alternée et $|a_n|$ est décroissante (dès que $n \geq 2$), et on vérifie facilement que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, donc on a aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(e) La série diverge. En effet, si elle convergerait (et valait, disons a), alors la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = a + \frac{\pi^2}{6}$$

convergerait aussi. (Pourquoi a-t-on le droit de séparer les sommes infinies en deux ?)

(f) Le terme général vaut $a_n = \frac{1}{n^2}$, donc la série converge (et vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

(g) Si a_n dénote le terme général, on a l'estimation suivante dès que $n \geq 2$:

$$a_n = \sqrt{n^2+7} - n = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n} \geq \frac{7}{\sqrt{(n+7)^2}+n} = \frac{7}{2n+7} \geq \frac{7}{7n} = \frac{1}{n}.$$

Donc la série diverge par comparaison, car $a_n \geq \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 2$) et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

(h) La série converge par le critère de Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} < 1.$$

(i) Cette série diverge car son terme général a_n ne tend pas vers 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} = \frac{1}{7} \neq 0$$

(j) La série converge par comparaison. On a

$$a_n = \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})} \leq \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Donc la série converge, car $0 \leq a_n \leq \frac{2}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de terme $\frac{1}{n^p}$ avec $p = \frac{3}{2} > 1$).

Solution 6.

(a) C'est une série géométrique avec $q = e^{-1}$. Sa valeur est donc $\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

(b) Les sommes partielles sont

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-2}} \pm \dots - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{n}} - 1.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -1$ et la série vaut -1 .

(c) On peut soit utiliser l'exercice 3(c) de la série 4, pour trouver:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Ou alors, on réécrit le terme a_k comme:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Les sommes partielles sont donc

$$S_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1} \pm \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{n+1} + 1.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ et la série vaut 1.

(d) Le terme a_k s'écrit

$$a_k = \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

Donc comme au (b), tous les termes dans les sommes partielles se compensent, sauf les 3 premiers et les 3 derniers:

$$S_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

et donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{11}{18}.$

Solution 7.

- (a) Vrai. Comme la série converge, son terme général $(-1)^n a_n \rightarrow 0$. Ainsi $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$, et il suit que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ par le théorème des deux gendarmes.
- (b) Faux. Prendre par exemple $a_n = \frac{1}{n}$. On retrouve alors la série harmonique, qui diverge (vu en cours).
- (c) Vrai. Comme $|(-1)^n a_n| = |a_n|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge absolument, donc converge.
- (d) Faux. Prendre par exemple la suite $a_n = -n$ qui est strictement décroissante. Comme $(-1)^n a_n = (-1)^{n+1} n$ ne converge pas vers zéro, la série diverge.
- (e) Faux. Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Par le critère de Leibniz, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Par contre $a_n^2 = \frac{1}{n}$ et on obtient la série harmonique qui diverge.
- (f) Vrai. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, il existe N tel que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \geq N$ (définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$). Donc $0 \leq a_n^2 \leq |a_n|$ pour tout $n \geq N$ (\Rightarrow pour n assez grand) et ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge par le critère de comparaison.
- (g) Faux. Prendre $a_n = \frac{1}{n^2}$.
- (h) Faux. En effet, seuls les termes a_k avec k grand comptent pour la convergence ou non d'une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Comme $a_k = \frac{1}{k^{3/2}}$ pour k assez grand, et que $p = \frac{3}{2} > 1$, la série converge. (Même si les mille premiers termes de la série sont ceux d'une série divergente.)

Version formelle: utiliser le critère de comparaison (pour $k > 1000$). Ou alors,

si $u = \sum_{k=0}^{1000} 5^k$ alors on a $0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq u + \sum_{k=1001}^n \frac{1}{k^{3/2}} \leq u + v$, où $v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$.

La suite $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ est donc croissante et bornée, et converge.

- (i) Vrai. On utilise la définition des séries comme limite des sommes partielles S_n , et le fait que la limite d'une somme est la somme des limites, si les limites existent.