

## Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*<sup>1</sup> de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

---

1. (même parfois plusieurs jours)

**Solution 1.**

(a) La suite  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$  converge vers 0 par le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

(b) On a

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n},$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$  par le théorème des deux gendarmes.

(c) La suite  $n^2 3^n 2^{-3n/2} = n^2 \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^n$  diverge, et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Cela se voit en utilisant le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} > \frac{3}{2 \cdot 1.5} = 1$$

(d) La suite est majorée par  $\frac{3n+8}{n^2+2n+6}$  et minorée par  $-\frac{3n+8}{n^2+2n+6}$ . Ces deux suites convergent vers 0, on conclut par le théorème des deux gendarmes que la suite originale aussi.

(e) La suite est majorée par  $\frac{1}{2n+1}$  et minorée par  $-\frac{1}{2n+1}$ . Ces deux suites convergent vers 0, on conclut par le théorème des deux gendarmes que la suite originale aussi.

(f) On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$  par un résultat du cours.

(g) On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1^0 = 1$ .

(h) On constate d'abord que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$$

pour tout  $A > 0$  (utiliser d'Alembert). Ainsi, pour  $n$  assez grand, on a  $n! \geq A^n$  (sinon la limite serait  $\geq 1$ ), d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (A^n)^{1/n} = A.$$

Comme  $A \geq 0$  est arbitraire, on trouve  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n} = +\infty$ .

**Solution 2.**

Si  $p(x)$  est de degré  $d \in \mathbb{N}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n^{d+1}} = 0$ , et donc  $p(n) \leq n^{d+1}$  pour  $n$  assez grand (sinon, la limite serait  $\geq 1$ ). De plus, comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = +\infty$ , on a  $p(n) \geq \frac{1}{n}$  pour  $n$  assez grand. Ainsi, en prenant les racines  $n$ -ièmes, on trouve

$$\frac{1}{n} \leq p(n) \leq n^{d+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{p(n)} \leq (\sqrt[n]{n})^{d+1}.$$

Les limites à gauche et à droite convergent vers  $\frac{1}{1} = 1$  et  $1^{d+1} = 1$ , d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$$

par le théorème des deux gendarmes.

**Solution 3.**

Pour  $\Leftarrow$ , on utilise la sous-suite triviale d'indices  $n_k = k$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$ , on trouve  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ .

Pour  $\Rightarrow$ , soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $a_n \rightarrow \ell$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ . Comme  $n_k$  est strictement croissante et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $n_k \geq k$ , et ainsi  $n_k \geq N$  dès que  $k \geq N$ . On pose alors  $K = K_\varepsilon = N$ , et on voit que, pour tout  $k \geq N$ , on a  $|a_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$  (car  $n_k \geq N$ ). Comme  $\varepsilon$  était arbitraire, on conclut que  $a_{n_k} \rightarrow \ell$ .

**Solution 4.**

(a) On écrit  $1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n} = \frac{n+1}{n} \frac{n+2}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ , d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = e \cdot e \cdot 1 = e^2.$$

(b) On écrit  $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}$ , d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

(c) On écrit  $1 - \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ , d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \frac{1}{e} = 1.$$

(d) En remplaçant l'indice  $n$  par  $k$ , on voit que la suite  $\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{k^2}$  est une sous-suite de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , avec indices  $n_k = k^2$ . Ainsi, ces deux suites ont la même limite, qui vaut  $e$ .

(e) A nouveau, on change l'indice à  $k$  pour plus de clarté:

$$\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^k = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}}.$$

Sous la racine, on a donc une sous-suite de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  avec indices  $n_k = 2k$ , et la limite de la suite originale vaut donc  $\sqrt{e}$ .

**Solution 5.**

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

On calcule

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+3} \cdot (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}) = \sqrt{n+3} \cdot \frac{(n+5) - (n+4)}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+4}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Solution 6.**

(a) On pose  $n_k = 2k$ , et on trouve  $a_{n_k} = 1 + \frac{1}{(-2)^{2k}} = 1 + \frac{1}{4^k} \rightarrow 1$ .

(b) La seule chance est d'annuler le sinus. Cela arrive à chaque fois que  $n$  est un multiple de 3, disons  $n = 3k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , car on a alors  $\sin(\frac{\pi n}{3}) = \sin(\pi k) = 0$ . Ainsi, pour  $n_k = 3k$ , on a  $a_{n_k} = 0 \rightarrow 0$ .

(c) La suite est déjà constante = 0, donc on peut prendre la sous-suite triviale (d'indices  $n_k = k$ ).

(d) On essaie  $n_k = 2k$  pour annuler le  $(-1)^n$ . On trouve  $\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$ , sous-suite de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  qui converge vers  $e$ .

(e) En prenant  $n_k = 4k$ , on trouve  $a_n = \frac{\cos(4k\pi)}{\frac{1}{2} + \cos(2k\pi)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \rightarrow \frac{2}{3}$

**Solution 7.**

(a) Si  $n$  est un nombre pair,  $n^3 - 1$  est un nombre impair, et donc  $\cos(\frac{\pi}{2}(n^3 - 1)) = \cos(\frac{\pi}{2}(\text{impair})) = 0$ . Ainsi, pour  $n_k = 2k$ , la sous-suite  $(a_{2k})$  est constante = 0 et converge donc vers 0.

(b) Si  $n$  est de la forme  $4k - 1$  (i.e. si  $n \equiv -1 \pmod{4}$ ), on vérifie que  $n^3 - 1$  est de la forme  $4m + 2$  (i.e.  $n^3 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ ). Donc pour  $n_k = 4k - 1$ , on a  $\cos(\frac{\pi}{2}(n^3 - 1)) = \cos(\frac{\pi}{2}(4m + 2)) = \cos(2\pi m + \pi) = -1 \rightarrow -1$ . La sous-suite  $(a_{4k-1})$  converge donc vers  $-1$ .

- (c) Pour  $n_k = k^2$ , on a  $a_{n_k} = \sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor = k - k = 0 \rightarrow 0$ .
- (d) Détermination des  $n_k$ : On cherche des indices  $n$  tels que  $\sqrt{n} \approx k + \frac{1}{2}$ , de sorte que  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$  et  $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \approx \frac{1}{2}$ . On prend le carré de l'équation  $\sqrt{n} = k + \frac{1}{2}$  pour trouver

$$n = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} \approx k^2 + k.$$

On pose donc  $n_k = k^2 + k$ .

Calcul de la limite pour  $n_k = k^2 + k$ : On remarque que  $k^2 \leq k^2 + k < (k+1)^2$  pour tous  $k \geq 0$ . En prenant la racine, on trouve

$$k \leq \sqrt{k^2 + k} = \sqrt{n_k} < k + 1 \quad \Rightarrow \quad \lfloor \sqrt{n_k} \rfloor = k.$$

Ainsi, on calcule

$$a_{n_k} = \sqrt{n_k} - \lfloor \sqrt{n_k} \rfloor = \sqrt{k^2 + k} - k = \frac{k}{\sqrt{k^2 + k} + k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

### Solution 8.

- (a) Vrai. La suite  $|a_n|$  est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.
- (b) Vrai. La suite  $|a_n|$  converge, elle est donc bornée, d'où  $\|a_n\| \leq M \Leftrightarrow |a_n| \leq M$ , et  $(a_n)$  est donc bornée.
- (c) Faux. On peut prendre  $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ .
- (d) Faux. Prendre  $a_n = \frac{1}{n}$ .
- (e) Faux. Prendre  $a_n = \frac{1}{n}$ .
- (f) Vrai, car elle converge.
- (g) Vrai. Si  $m > n$ , on a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} 10^{-k} = 10^{-n} \sum_{k=0}^{m-n-1} 10^{-k} = 10^{-n} \frac{1 - \frac{1}{10^{m-n}}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq 10^{-n} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-n}. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\frac{10}{9} \cdot 10^{-n} \rightarrow 0$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $\frac{10}{9} \cdot 10^{-n} \leq \varepsilon$ . Alors pour  $m, n \geq N$ , on a  $|a_m - a_n| \leq \frac{10}{9} \cdot 10^{-n} \leq \varepsilon$ , et  $(a_n)$  est de Cauchy.

- (h) Faux. Prendre  $a_n = \sqrt{n}$ . Alors  $a_{n+k} - a_n = \frac{n+k-n}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}}$  converge vers 0 pour tout  $k$ , mais  $(a_n)$  diverge.