

## Remarque sur les corrigés


Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*<sup>1</sup> de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

---

1. (même parfois plusieurs jours)

**Solution 1.**

(a) Initialisation:  $a_0 = c = c + 0b$ , donc  $P(0)$  est vérifiée.  Pas de récurrence:

On suppose que  $P(n)$  est vraie, et on montre  $P(n+1)$ :  $a_{n+1} = a_n + b \stackrel{P(n)}{=} bn + c + b = b(n+1) + c$ , et donc  $P(n+1)$  est vérifiée.

(b)  $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$ , donc  $P(1)$  est vérifiée. Pour  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , on a  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \stackrel{P(n)}{=} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ , donc  $P(n+1)$  est vérifiée.

(c) Pour  $n = 1$ ,  $(x-1)(1) = x^1 - 1$ , donc  $P(1)$  est vérifiée. Pour  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , on a

$$\begin{aligned} (x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) &= (x-1)x^n + \underbrace{(x-1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)}_{= x^n - 1, \text{ par } P(n)} \\ &= (x-1)x^n + x^n - 1 \\ &= x^{n+1} - x^n + x^n - 1 = x^{n+1} - 1, \end{aligned}$$

et  $P(n+1)$  est démontrée.

**Solution 2.**

(a)  $\frac{n(n+1)!}{(n+1)(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)(n+2)!}{(n+2)n!} = n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1)$ .  
 $\frac{(n+1)\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} = k+1$ .

(b) On a  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{(k-1)!(n-k)!k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$ .

(c) On a  $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^0$ , donc  $P(0)$  est vérifiée. Pour  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , on a

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \stackrel{P(n)}{=} (x+y) \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}. \end{aligned}$$

On peut alors faire commencer la première somme à l'indice  $k = 0$ , et terminer la deuxième à l'indice  $n+1$  (on ne fait qu'ajouter 0, par définition du coefficient binomial). Grâce au point (b), l'expression devient alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} \stackrel{(b)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}$$

et  $P(n+1)$  est vérifiée.

### Solution 3.

(a)  $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ , donc  $P(0)$  est vérifiée. Pour  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , on a  $\sum_{k=0}^{n+1} k = n+1 + \sum_{k=0}^n k \stackrel{P(n)}{=} n+1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n+2+n^2+n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , donc  $P(n+1)$  est vérifiée.

(b)  $0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}$ , donc  $P(0)$  est vérifiée. Pour  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , on a  $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=0}^n k^2 \stackrel{P(n)}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , ce qui donne  $\frac{(n+1)(6(n+1)+n(2n+1))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$  et  $P(n+1)$  est vérifiée.

(c)  $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ , donc  $P(1)$  est vérifiée. Pour  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , on a  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \stackrel{P(n)}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$ , donc  $P(n+1)$  est vérifiée.

(d) On procède par récurrence, ou alors on applique l'ex 2(c) à  $x = y = 1$ .

(e) On procède par récurrence double (on va montrer que  $P(n-1)$  et  $P(n)$  impliquent  $P(n+1)$ ).


Initialisation: On vérifie  $P(0)$  et  $P(1)$ . On a  $\binom{0}{0} = 1 = f_1$ , donc  $P(0)$  est vérifiée, et  $\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 = f_2$ , donc  $P(1)$  est vérifiée.



Pas de récurrence: On suppose que  $P(n-1)$  et  $P(n)$  sont vérifiées, et on montre  $P(n+1)$ . On a  $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k}{k-1}$ , en utilisant le 2(b). Comme le terme  $k = n+1$  est nul dans les deux sommes, et le terme  $k = 0$  est nul dans la seconde somme, l'expression devient  $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} +$

$\sum_{k=1}^n \binom{n-k}{k-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} = f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$ , et  $P(n+1)$  est vérifiée.

**Solution 4.**

- (a)  $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} + 1.$
- (b) On multiplie l'équation de (a) par  $x^n$ .
- (c) On calcule:  $a_{n+1} + a_n = c(\alpha^{n+1} + \alpha^n) + d(\beta^{n+1} + \beta^n) = c\alpha^{n+2} + d\beta^{n+2} = a_{n+2}.$
- (d) Init: On vérifie la formule pour  $f_0$  et  $f_1$ .  Pas de récurrence: Posons  $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ . On suppose que  $f_n = a_n$  et  $f_{n+1} = a_{n+1}$ , et on veut montrer que  $f_{n+2} = a_{n+2}$ . Par définition,  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ , ce qui vaut  $a_{n+1} + a_n$  grâce à l'hypothèse de récurrence. Mais comme la suite  $(a_n)$  est de la forme de (c) (avec  $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$  et  $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ), on a  $a_{n+1} + a_n = a_{n+2}$ . D'où  $f_{n+2} = a_{n+2}$ .

**Solution 5.**

- (a) Si  $|r| \leq 1$ , alors  $|a_n| = |ar^n| = a|r|^n \leq a$ , donc  $a_n \in [-a, a]$  et la suite est bornée. Si  $r > 1$ , on remarque que, dès que  $n \geq 1$ ,

$$a_n - a_{n-1} = ar^{n-1}(r - 1) \geq a(r - 1).$$

Après une preuve par récurrence facile, on voit que dès que  $n \geq 1$ ,

$$a_n \geq \underbrace{a(r - 1)}_b \cdot n + a.$$

Donc  $a_n$  est plus grand que la suite arithmétique  $b_n = a(r - 1)n + a$  qui est non bornée (cf cours). Ainsi  $a_n$  n'est pas bornée. Finalement, si  $r < -1$ , on applique le raisonnement précédent à la suite  $|a_n| = a|r|^n$ . On trouve que  $|a_n|$  n'est pas bornée, et donc  $a_n$  non plus.

- (b) Si  $r \geq 0$ ,  $a_n \geq 0$  et la suite est minorée par 0. Et si  $r \in [-1, 0]$ , la suite est bornée (cf (a)) donc minorée.
- (c) Si elle est strictement croissante, alors  $a_1 > a_0$ , d'où  $ar > a$  et  $r > 1$ . Si  $r > 1$ , on a  $ar > a$ , d'où  $ar^2 > ar, \dots, ar^{n+1} > ar^n$ , et donc  $a_{n+1} > a_n$ , et la suite est strictement croissante.
- (d) Très similaire au cas précédent.
- (e) On a  $r = 1 \Rightarrow a_n = ar^n = a = a_0 \Rightarrow$  la suite est constante  $\Rightarrow a_1 = a_0 \Rightarrow ar = a \Rightarrow r = 1$ . La boucle est bouclée !

**Solution 6.**

- (a) Strictement croissante, bornée car convergente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3}{n \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$$

- (b) Pas monotone (ni croissante, ni décroissante), bornée car convergente vers  $\frac{5}{3}$  (même idée qu'au (b)).

(c) Strictement croissante, non bornée (car  $a_n \geq n$  qui n'est pas majorée), donc divergente.

(d) Pas monotone (ni croissante ni décroissante), bornée car convergente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n^2(3+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

(e) Strictement croissante, bornée car convergente vers  $\frac{1}{3}$  (voir point précédent, mais avec  $n^2$  en haut au lieu de  $n$ .)

(f) Pas monotone (ni croissante, ni décroissante), bornée car convergente:

$$|a_n| = n^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{12}} \rightarrow 0^{\frac{1}{12}}$$

(g) Strictement décroissante, bornée car convergente:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donc  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0$  par le théorème des deux gendarmes.

(h) Strictement décroissante, bornée car convergente. On a  $n^2 \leq n^2 + 2 \leq n^2 + 2n + 4 = (n+2)^2$ . En prenant les racines, on trouve  $n \leq \sqrt{n^2+2} \leq n+2$ , et donc

$$\frac{n}{2n} \leq \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} \leq \frac{n+2}{2n}.$$

Les suites à gauche et à droite convergent vers  $\frac{1}{2}$ , donc celle du milieu aussi grâce au théorème des deux gendarmes.

(i) Strictement croissante, bornée car convergente. On multiplie par  $\frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3}}$  pour trouver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+3}} = 0$$

car le dénominateur tend vers  $+\infty$ .

(j) Strictement croissante, bornée car convergente. On multiplie par  $\frac{\sqrt{n^2-1}+(n-1)}{\sqrt{n^2-1}+(n-1)}$  pour trouver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1-(n-1)^2}{\sqrt{n^2-1}+n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2-\frac{2}{n})}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{(2-0)}{(\sqrt{1-0}+1-0)} = 1.$$

(k) Strictement croissante, bornée car convergente. On multiplie par  $\frac{\sqrt{n^4+6n-3+n^2}}{\sqrt{n^4+6n-3+n^2}}$  pour trouver que la limite vaut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(6n-3)}{\sqrt{n^4+6n-3+n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(6-\frac{3}{n})}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{6}{n^3}-\frac{3}{n^4}}+1\right)} = \frac{6}{1+1} = 3.$$

**Solution 7.**

(a) Soit  $\varepsilon > 0$ . On choisit  $N$  en résolvant l'inéquation:

$$\left| \frac{\sqrt{n} + 7}{\sqrt{n}} - 1 \right| = \frac{7}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq \frac{7}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \left( \frac{7}{\varepsilon} \right)^2.$$

On pose alors  $N = N_\varepsilon =$  n'importe quel entier  $\geq \left( \frac{7}{\varepsilon} \right)^2$ . Ainsi, dès que  $n \geq N$ , on a

$$\left| \frac{\sqrt{n} + 7}{\sqrt{n}} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

(cf calcul précédent). Comme  $\varepsilon > 0$  était arbitraire, cela montre donc que  $|a_n - 1| \rightarrow 0$ , i.e., que  $a_n \rightarrow 1$ .

(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $a_n \rightarrow a$ , on peut choisir  $N = N_\varepsilon$  tel que, dès que  $n \geq N$ , on a  $|a_n - a| \leq \varepsilon$  (définition de convergence). On utilise alors l'inégalité triangulaire inversée (à démontrer !)

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, dès que  $n \geq N$ , on a

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon$  était arbitraire, cela montre:  $|a_n| \rightarrow |a|$ .

(c) Pour la suite  $a_n = (-1)^n$ , on a  $|a_n| = 1 \rightarrow 1$ , mais  $(a_n)$  ne converge pas.

**Solution 8.**

(a) Au (d), on a  $\sup A = \max A = 4$ , puisque  $4 = 3 + \frac{1}{1} \in A$ ; de plus, 3 est un minorant et la suite  $a_n = 3 + \frac{1}{n}$  converge vers 3: c'est donc  $\inf A$ .

Pour le (g), on trouve  $\inf A = \min A = 0$  et la suite écrite converge vers 1 qui est un majorant, c'est donc le sup.

Et pour le (i), on considère la suite de rationnels  $(a_n) = (1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots)$  qui est incluse dans  $A$ , et qui converge vers  $\sqrt{2}$  par en dessous. Comme  $\sqrt{2}$  est un majorant, cela montre que  $\sup A = \sqrt{2}$ . En prenant  $(-1) \cdot$  cette suite, on montre que  $\inf A = -\sqrt{2}$ .

(b) On montre le cas du sup (le cas du inf est similaire). Supposons que  $x = \sup A$ . Alors  $x$  est le plus petit majorant, il existe donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  un élément  $a_n \in A$  tel que  $x - \frac{1}{n} < a_n \leq x$ . Par le théorème des deux gendarmes, la suite  $(a_n)$  converge vers  $x$ .

A l'inverse, supposons que  $x$  est un majorant et  $(a_n) \subseteq A$  une suite qui converge vers  $x$ . Il faut montrer que  $x$  est le plus petit majorant. Soit donc  $y < x$ , et posons  $\varepsilon = \frac{x-y}{100}$ . Comme  $a_n \rightarrow x$ , on a  $|a_n - x| \leq \varepsilon$  pour  $n$  assez grand (disons  $n \geq N$ ). D'où  $a_n \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ , et ainsi  $y < a_n$  par choix de  $\varepsilon$ . Donc  $y$  n'est pas un majorant, et  $x$  est bien le sup.

**Solution 9.**

- (a) Faux. La suite  $a_n = (-1)^n$  ne converge pas, mais est bornée.
- (b) Faux. La suite  $a_n = \frac{1}{n}$  vérifie  $a_n > 0$  pour tout  $n$ , mais sa limite est 0.
- (c) Faux. Si  $n_0 = 0$  et  $a_n$  est la suite définie par  $a_0 = 10^{30} + 1$ , et  $a_n = 0$  pour  $n \geq 1$ , alors  $a_n$  converge vers 0 mais  $|a_0 - 0| > 10^{30}$ .
- (d) Faux. Pour  $a_n = n$  et  $b_n = -\frac{n}{3}$ , on a  $a_n + 3b_n = 0$ , une suite convergente (vers 0), mais ni  $a_n$ , ni  $b_n$  ne convergent.
- (e) Faux. Voir point précédent.