

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

- (a) $i^7 = -i = 0 - 1 \cdot i$.
- (b) $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$.
- (c) $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.
- (d) $(1 + i)^2 = 2i = 0 + 2i$.
- (e) $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4 = -4 + 0i$.
- (f) En polaire: $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ donc $(1 + \sqrt{3}i)^6 = 2^6 e^{i2\pi} = 2^6 = 64$.
 En cartésien: On a $(1 + \sqrt{3}i)^3 = 1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 = 1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i = -8$, d'où $(1 + \sqrt{3}i)^6 = (-8)^2 = 64 = 64 + 0i$.

Solution 2.

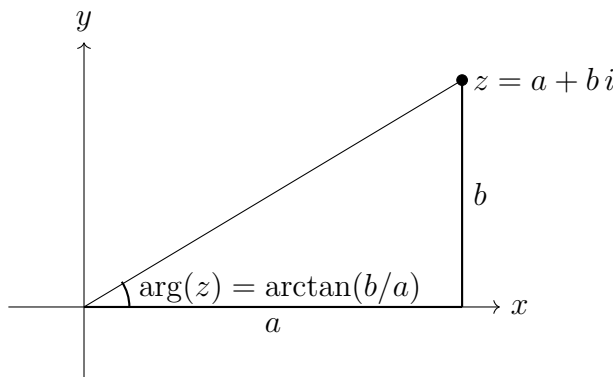
- (a) $\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 1, \bar{z} = 1 - i, \arg(z) = \frac{\pi}{4}, \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
- (b) $\operatorname{Re}(z) = 14, \operatorname{Im}(z) = 0, \bar{z} = 14, \arg(z) = 0, \frac{1}{z} = \frac{1}{14}$.
- (c) $\operatorname{Re}(z) = 2, \operatorname{Im}(z) = -2\sqrt{3}, \bar{z} = 2 + 2\sqrt{3}i, \arg(z) = -\frac{\pi}{3}, \frac{1}{z} = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$.
- (d) $\operatorname{Re}(z) = 2 \cos(3), \operatorname{Im}(z) = 2 \sin(3), \bar{z} = 2e^{-3i}, |z| = 2, \arg(z) = 3, \frac{1}{z} = \frac{1}{2}e^{-3i}$.
- (e) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -\pi, \bar{z} = \pi i, \arg(z) = -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{z} = \frac{1}{\pi}i$.

Solution 3.

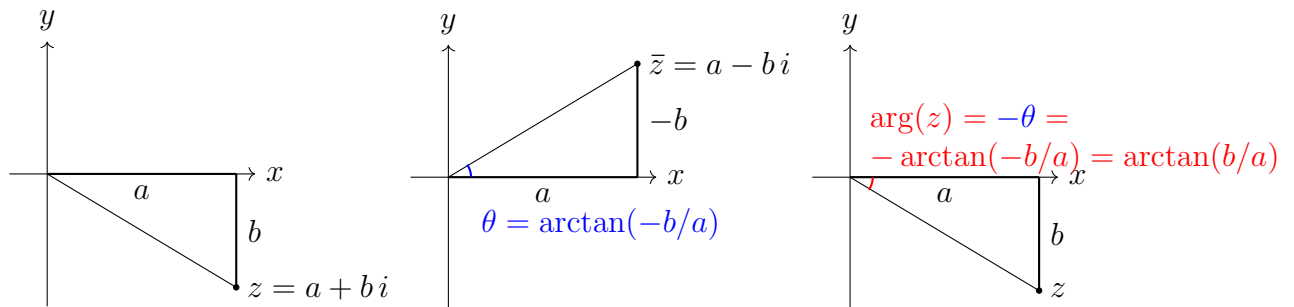
- (a) $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- (b) $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- (c) $-5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
- (d) $12 - 5i = 13e^{-i \arctan(\frac{5}{12})}$.
- (e) $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
- (f) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- (g) $\frac{\cos(1)}{e^{50}} + i \frac{\sin(1)}{e^{50}} = e^{-50}e^i$.
- (h) $\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{10}}e^{-i \arctan(\frac{9}{7})}$.
- (i) $\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}i = a e^{i\frac{\pi}{4}}$, où $a = 2 \cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. (Faire un dessin!)

Solution 4.

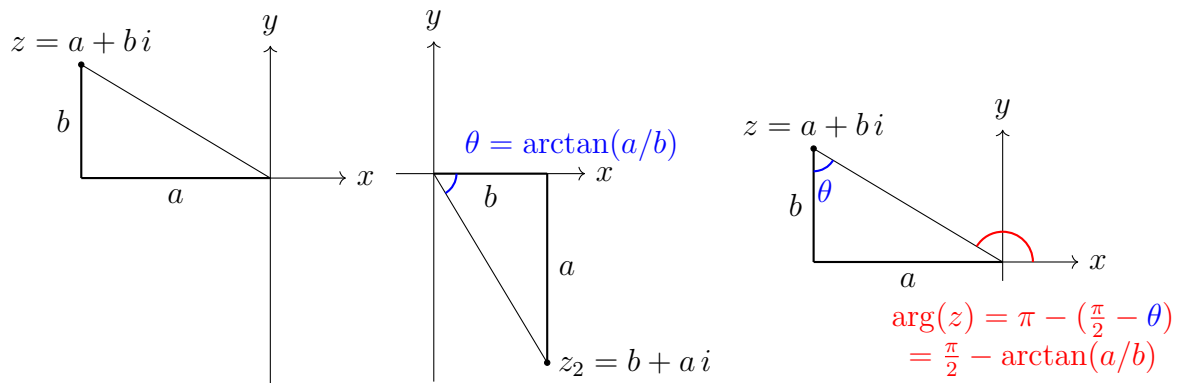
La formule pour $a > 0$ et $b \geq 0$ s'obtient par trigonométrie:



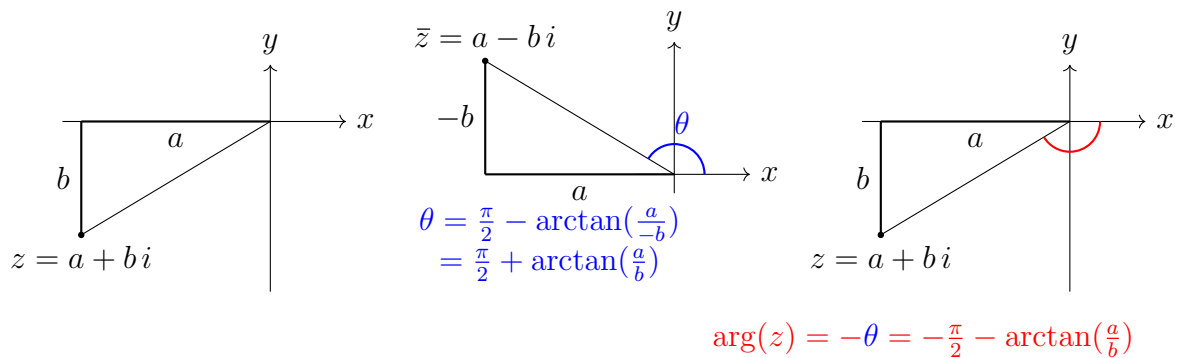
La formule pour $a > 0$ et $b \leq 0$ s'obtient en utilisant la formule d'avant et une symétrie d'axe x (aka conjugaison complexe), ainsi que le fait que \tan et donc \arctan est une fonction impaire:



La formule pour $b > 0$ s'obtient en échangeant x et y , et en utilisant la formule d'avant:



La formule pour $b < 0$ s'obtient en appliquant la formule d'avant au conjugué complexe:



Finalement, si $a = 0$ et $b < 0$, l'argument vaut π par convention.

Solution 5.

- (a) Posons $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$. Alors $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. De plus, $\overline{z_1 z_2} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} = ac - bd - i(ad + bc)$, et de l'autre côté, $\overline{z_1} \overline{z_2} = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(ad + bc)$. Finalement, $z_1/z_2 = \overline{(z_1 \overline{z_2})/z_2} = \overline{z_1 \overline{z_2}/|z_2|} = \overline{z_1 z_2/(z_2 \overline{z_2})} = \overline{z_1/\overline{z_2}}$.
- (b) Si $z = a + bi$, $e^z = e^a \cos(b) + ie^a \sin(b)$, d'où $\overline{e^z} = e^a \cos(b) - ie^a \sin(b) = e^a \cos(b) + ie^a \sin(-b) = e^{a-bi} = e^{\overline{z}}$.

- (c) Si $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, avec $a_i \in \mathbb{R}$, alors $\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n} z^n + \dots + \overline{a_1} z + \overline{a_0} = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = P(z)$, car les $a_i \in \mathbb{R}$ et donc $\overline{a_i} = a_i$. Donc si $P(z_0) = 0$, on a $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$, et $\overline{z_0}$ est donc bien une racine de P . Ce n'est pas vrai si les coefficients ne sont pas réels: Si $P(z) = z - i$, alors i est une racine, mais pas $\overline{i} = -i$.

Solution 6.

- (a) Une solution particulière est $z_0 = -1$. Les autres solutions s'obtiennent en multipliant z_0 par les solutions de $z^n = 1$ (cf cours): elles sont donc données par $z \in \{-1 \cdot e^{ik2\pi/5} \mid k = 0, \dots, 4\} = \{e^{i\pi+ik2\pi/5} \mid k = 0, \dots, 4\}$.

- (b) On cherche une solution $z_0 = a + bi$. On a $z_0^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$; et en regardant le module, on trouve $a^2 + b^2 = |z_0|^2 = |z_0^2| = |3 - 4i| = 5$. Les équations sont donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

La somme de l'équation 1 et 3 donnent: $2a^2 = 8 \Rightarrow a = 2$. De l'équation 2, on tire $b = -1$. Les solutions sont donc: $\pm(2 - i)$.

- (c) Comme $-2i = 2e^{-i\pi/2}$, une solution particulière est $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}$. Les autres sont obtenues en multipliant par les solutions de $z^4 = 1$: On trouve $z \in \{\sqrt[4]{2}e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)/4} \mid k = 0, \dots, 3\} = \{\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}\}$.

- (d) Comme $(1 + \sqrt{3}i)^8 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^8 = 2^8 e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2^8 e^{i\frac{2\pi}{3}}$, les solutions sont $z_1 = 2^4 e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

- (e) En appliquant la formule générale pour les équations de degré 2:

$$z = \frac{1}{2} \left(-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (12 - 4i)} \right) = \frac{1}{2} \left(-6 \pm \sqrt{-12 + 16i} \right).$$

Ici $\pm\sqrt{-12 + 16i}$ veut dire "les deux solutions de $u^2 = -12 + 16i$ ". On résout donc cette équation; comme au (b), pour $u_0 = a + bi$, les équations sont

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -12 \\ 2ab = 16 \\ a^2 + b^2 = 20. \end{cases}$$

D'où $2a^2 = 8 \Rightarrow a = 2$ et $b = 4$. Donc $u_0 = \pm 2 + 4i$ et les solutions de l'équation originale sont $z = -2 + 2i$ et $z = -4 - 2i$.

- (f) On trouve d'abord les solutions de $u^2 + 4u + 2 = 0$, qui sont données par $u_{\pm} = -2 \pm \sqrt{2}$. On remarque alors que pour trouver des solutions de l'équation originale, il nous suffit de trouver z tel que $z^3 = u_+$ et $z^3 = u_-$. On raisonne alors comme plus haut, pour trouver les 6 solutions $z = -\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\pi}, -\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{3}}, -\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Solution 7.

(a) On a déjà trouvé les racines de ce polynôme à l'exercice 6(a): $e^{\pm i\frac{\pi}{5}}$, $e^{\pm i\frac{3\pi}{5}}$ et -1 . La décomposition complexe est donc: $(z+1)(z-e^{i\frac{\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{\pi}{5}})(z-e^{i\frac{3\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{3\pi}{5}})$. On trouve la décomposition réelle en groupant deux par deux les facteurs complexes conjugués: $(z+1)(z^2-2\cos(\frac{\pi}{5})z+1)(z^2-2\cos(\frac{3\pi}{5})z+1) = (z+1)(z^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1)(z^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1)$.

(b) Les racines ont été trouvées au 6(f). Notons $v_{\pm} = -\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}$. La décomposition complexe est:

$$(z-v_-)(z-v_+)(z-e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot v_-)(z-e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot v_+)(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot v_-)(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot v_+)$$

On groupe deux par deux les facteurs complexes conjugués:

$$(z-v_-)(z-v_+)(z^2+v_-z+v_-^2)(z^2+v_+z+v_+^2)$$

Solution 8.

Le plus simple est de développer l'équation

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}.$$

Le côté gauche donne $e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$, et pour le côté droit, on trouve

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y). \end{aligned}$$

En comparant la partie imaginaire des deux expressions (qui sont égales), on trouve

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Remarque: En comparant les parties réelles, on retrouve la formule pour $\cos(x+y)$.

Solution 9.

$1+i, 1-i, 3, -1$

$2+i, 2-i, 3, -1$

$2+i, 1+i, 3, -1$

$1+i, 1-i, 5, -1$

Comme c'est un polynôme à coefficients réels, les racines non-réelles viennent par paires complexes conjuguées. Cela exclut la réponse bas gauche. En développant le membre de droite de l'équation

$$z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4),$$

on voit que la somme des racines vaut 6, ce qui exclut la réponse haut gauche, et que le produit des racines doit valoir -15 , ce qui exclut la réponse bas droite.

Solution 10.

$z^4 = 4$

$z^4 = -4$

$z^4 = 12 - 12i$

$z^4 = -12 + 12i$

Calculer !

Solution 11.

(a) Faux. Pour $z = 1$, $\arg(z) = 0$ donc $e^{\arg(z)} = 1$ mais $\arg(e^z) = 0$.

(b) Faux. Pour $z = -1$, $|z| = 1$ donc $e^{|z|} = e$ mais $|e^{-1}| = \frac{1}{e}$.

(c) Faux. Pour $z = i\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}(z) = 0$, donc $e^{\operatorname{Re}(z)} = 1$, mais $\operatorname{Re}(e^{i\pi/2}) = \operatorname{Re}(i) = 0$.

(d) Vrai. Pour $z = a + ib$, on a $e^z = e^a e^{ib}$, donc $|e^z| = e^a = e^{\operatorname{Re}(z)}$.