

## Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*<sup>1</sup> de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

---

1. (même parfois plusieurs jours)

**Solution 1.**

On raisonne comme dans le cours. Supposons que  $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ . On peut donc écrire  $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$  où la fraction est irréductible (on ne peut pas la simplifier). Alors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 2b^3 \quad \Rightarrow \quad a^3 \text{ est pair} \quad \Rightarrow \quad a \text{ est pair,}$$

où, pour la dernière implication, on utilise le même argument que dans le cours: si  $a$  était impair, disons  $a = 2k + 1$ , alors  $a^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(\dots) + 1$  serait aussi impair. Donc  $a$  est forcément pair. Il suit que  $a = 2c$ , pour un  $c \in \mathbb{Z}$  et on trouve donc l'équation

$$(2c)^3 = 2b^3 \quad \Rightarrow \quad 8c^3 = 2b^3 \quad \Rightarrow \quad 4c^3 = b^3 \quad \Rightarrow \quad b^3 \text{ est pair} \quad \Rightarrow \quad b \text{ est pair,}$$

où l'on a utilisé le même argument qu'avant dans la dernière implication. Donc  $\frac{a}{b} = \frac{2c}{2d}$ , ce qui est absurde, car on a supposé que la fraction était irréductible. On conclut que  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ .

La preuve pour  $\sqrt{3}$  est similaire. On suppose que  $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ , et on écrit  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$  où la fraction est irréductible. Par le même argument que plus haut, on trouve que  $a^2 = 3b^2$ , donc  $a^2$  est un multiple de 3, et il suit que  $a$  est lui aussi un multiple de 3: sinon,  $a$  s'écrit comme  $3k + 1$  ou  $3k + 2$ , et on vérifie que ces expressions élevées au carré ne donnent pas de multiple de 3. On continue sur les mêmes lignes: on trouve que  $a = 3c$ , puis en remplaçant dans l'équation on trouve que  $b^2$  doit lui aussi être un multiple de 3. Donc  $\frac{a}{b} = \frac{3c}{3d}$ , ce qui est absurde, car on a supposé que la fraction était irréductible, et ainsi  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**Solution 2.**

- (a)  $A = [-2, 0]$ .
- (b)  $A = [-1, +\infty[$ .
- (c)  $A = ]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ .
- (d)  $A = ]-3, -2] \cup [2, +\infty[$ .
- (e)  $A = ]-\infty, -\sqrt[3]{3}]$ .
- (f)  $A = ]-\sqrt{3}, -1[ \cup ]1, \sqrt{3}[$ . (Attention de bien traiter les cas où  $x^2 - 2 > 0$  et où  $x^2 - 2 < 0$ .)

**Solution 3.**

- (a) L'ensemble est borné,  $\sup A = \max A = \sqrt{2}$ ,  $\inf A = -1$  et  $\min A$  n'existe pas.
- (b) L'ensemble est minoré mais pas majoré. On a  $\sup A = +\infty$  (et donc n'existe pas dans  $\mathbb{R}$ ),  $\inf A = \sqrt{3}$  et  $\max A$  et  $\min A$  n'existent pas.
- (c) On a  $|2x - 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ , et donc  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ . Donc l'ensemble est borné,  $\sup A = \max A = 1$ , et  $\inf A = \min A = 0$ .

- (d)  $A = \{3 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ .  $A$  est majoré par 4 et minoré par 3, donc borné. Comme  $4 \in A$ , on a  $\sup A = \max A = 4$ . Pour voir que  $\inf A = 3$ , il faut montrer que c'est le plus grand minorant ; cela revient à prendre  $x > 3$  et à montrer que ce n'est pas un minorant, en construisant un  $a \in A$  tel que  $a < x$ . Soit  $x > 3$ . On choisit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > \frac{1}{x-3}$ , et on pose  $a = 3 + \frac{1}{n}$ . Alors  $a \in A$  et  $a = 3 + \frac{1}{n} < x$ , puisque  $3 + \frac{1}{n} < x \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x - 3 \Leftrightarrow n > \frac{1}{x-3}$ . Ainsi  $x$  n'est pas un minorant, et 3 est donc le plus petit ; c'est  $\inf A$ . Comme  $3 \notin A$ ,  $\min A$  n'existe pas.
- (e) On a  $A = \{0\}$ . Il est donc borné, et  $\sup A = \max A = \inf A = \min A = 0$ .
- (f) L'ensemble est borné: majoré par  $\frac{1}{2}$  (puisque  $\frac{(-1)^n}{n} \leq 0 \leq \frac{1}{n}$  si  $n$  est impair, et  $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$  si  $n$  est pair) et minoré par  $-1$  (car  $\frac{(-1)^n}{n} \geq 0 \geq -1$  si  $n$  est pair, et  $\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \geq -1$  si  $n$  est impair). Comme  $\frac{1}{2} \in A$ , on a  $\max A = \frac{1}{2} = \sup A$ , et comme  $-1 \in A$ , on a  $\min A = -1 = \inf A$ .
- (g) L'ensemble est borné: majoré par 1 (puisque  $n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$ ) et minoré par 0 (car  $\frac{n}{n+1} \geq 0$ ). Comme  $0 \in A$ , on a  $\min A = \inf A = 0$ . Pour  $\sup A$ , il faut montrer que 1 est le plus petit majorant. Soit  $s < 1$ . On choisit  $n \geq \frac{1}{1-s}$  et on pose  $a = \frac{n}{n+1} \in A$ . Alors

$$a = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > s \quad \Leftrightarrow \quad 1 - s > \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{1-s} - 1$$

Ainsi  $a > s$ , et 1 est donc bien le plus petit majorant, d'où  $\sup A = 1$ . Finalement, comme  $\frac{n}{n+1} < 1$  pour tout  $n$ , il suit que  $\sup A = 1 \notin A$  et donc  $\max A$  n'existe pas.

- (h) L'ensemble  $\mathbb{Q}$  contient  $\mathbb{Z}$  qui est non borné, et  $\mathbb{Q}$  n'est donc pas borné non plus. On a  $\sup A = +\infty$ ,  $\inf A = -\infty$ , tous les deux n'existent donc pas dans  $\mathbb{R}$ , et  $\max A$  et  $\min A$  n'existent pas.
- (i) L'ensemble est borné: majoré par  $\sqrt{2}$  et minoré par  $-\sqrt{2}$ .  $\sqrt{2}$  est-il le plus petit majorant? Si  $s < \sqrt{2}$ , on utilise la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  pour trouver  $q \in \mathbb{Q}$  avec  $s < q < \sqrt{2}$ . Comme  $q \in A$ ,  $s$  n'est pas un majorant, et  $\sqrt{2}$  est donc bien le plus petit, d'où  $\sup A = \sqrt{2}$ . On montre similairement que  $\inf A = -\sqrt{2}$ . Comme  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,  $\sup A = \sqrt{2} \notin A$  et donc  $\max A$  n'existe pas. Similairement,  $\min A$  n'existe pas.

#### Solution 4.

- (a) Si  $x = 0.\bar{9}$ , alors  $10x = 9.\bar{9} = 9 + 0.\bar{9} = 9 + x$ . Donc  $10x = 9 + x \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$ .
- (b) On a  $3.14159 = \frac{314159}{100000}$  et  $55.\overline{612} = 55 + 0.\overline{612}$ . Or si  $x = 0.\overline{612}$ , alors  $1000x = 612.\overline{612} = 612 + 0.\overline{612} = 612 + x$ . Donc  $1000x = 612 + x \Rightarrow 999x = 612 \Rightarrow x = \frac{612}{999}$ . Ainsi  $55.\overline{612} = 55 + \frac{612}{999} = \frac{6173}{111}$ .
- (c) Une division en colonne donne  $\frac{8}{13} = 0.615384615\dots$ . On suppose donc que  $\frac{8}{13} = 0.\overline{615384}$ . Et on le montre comme au point (b)!

**Exercice 5.** (*QCM type examen*)

- $A$  n'est pas minoré.   $\inf A = -1$ .  
  $\inf A = 0$ .   $\inf A \in ]-1, 0[$ .

L'expression  $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$  est bien définie puisque  $x \in ]-1, +\infty[$ . On a

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 7 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq \frac{1}{7} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{49} - 1 = -\frac{48}{49}.$$

Donc  $A = [-\frac{48}{49}, +\infty[$ , d'où  $\inf A = \min A = -\frac{48}{49} \in ]-1, 0[$ .

**Exercice 6.** (*QCM type examen*)

- $\inf A = -1$  et  $\sup A = 2$ .   $\inf A = 0$  et  $\sup A = 2$ .  
  $\inf A = -1$  et  $\sup A = 1$ .   $\inf A = 0$  et  $\sup A = 1$ .

On observe que  $\cos(\frac{\pi}{2}n)$  boucle sur les 4 valeurs  $1, 0, -1, 0$ . Ainsi, les nombres négatifs dans  $A$  sont de la forme  $-1 + \frac{1}{n}$ , et l'inf de ces nombre vaut  $-1$  (similaire à l'exercice 2(d), mais avec  $-1$  à la place de  $3$ ). Les nombres positifs dans  $A$  sont eux de la forme  $0 + \frac{1}{n}$  ou  $1 + \frac{1}{n}$ ; donc au plus  $2$ . Or, si  $n = 1$ , on a  $\cos(\frac{\pi}{2}(n-1)) + \frac{1}{n} = 2$ , donc  $2 \in A$  et ainsi  $\sup A = \max A = 2$ .

**Solution 7.**

- (a) Vrai:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  (cela suit aussi directement du fait que  $\mathbb{Q}$  est un corps !)
- (b) Faux:  $\sqrt{2}$  est irrationnel, donc  $-\sqrt{2}$  aussi, mais  $0 = \sqrt{2} + (-\sqrt{2})$  est rationnel.
- (c) Vrai: Pour  $a \in \mathbb{Q}$  et  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , posons  $c = a + b$ . Si  $c \in \mathbb{Q}$ , alors  $c + (-a)$  est aussi dans  $\mathbb{Q}$  (par le point (a)), donc  $b = c + (-a) \in \mathbb{Q}$ , une contradiction. Cela force  $c \notin \mathbb{Q}$  i.e.,  $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
- (d) Faux:  $]0, 1[$  est majoré, mais n'a pas de max.
- (e) Vrai: C'est un théorème du cours.
- (f) Vrai: Si  $A$  contient  $\geq 2$  éléments, on trouve  $a, b \in A$  avec  $a < b$ . Donc  $\inf A \leq a < b \leq \sup A$ , d'où  $\inf A \neq \sup A$ . Donc  $A$  n'a qu'un élément.