Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.
On a $A\cup B = \{1,2,3,4\}$, $A\cap B = \{3\}$, $A\setminus B = \{1\}$, $B\setminus A = \{2,4\}$, $E\setminus A = \{2,4,5\}$, $E \setminus B = \{1,5\}$, $E \setminus (A \cup B) = \{5\}$, $E \setminus (A \cap B) = \{1,2,4,5\}$.

Solution 2.
On montre la double inclusion: $\subseteq$ et $\supseteq$. Un élément $z \in X \cup Y$ est forcément soit dans X, soit dans Y. Donc si $z \notin X \cup Y$, alors $z \notin X$ **et** $z \notin Y$. Reformulé, on voit donc que tout $z \in Z \setminus (X \cup Y)$ appartient aussi à $Z \setminus X$ **et** à $Z \setminus Y$, donc à $Z \setminus X \cap Z \setminus Y$. On a donc montré:

$$Z \setminus (X \cup Y) \subseteq Z \setminus X \ \cap \ Z \setminus Y.$$

Pour l'autre inclusion, soit $z \in Z \setminus X \ \cap \ Z \setminus Y$. Donc z n'est ni dans X, ni dans Y, et n'est donc pas élément de $X \cup Y$. Ainsi tout $z \in Z \setminus X \ \cap \ Z \setminus Y$ appartient aussi à $Z \setminus (X \cup Y)$, et on vient donc de montrer que:

$$Z \setminus (X \cup Y) \supseteq Z \setminus X \ \cap \ Z \setminus Y.$$

Comme les ensembles sont inclus l'un dans l'autre et vice versa, ils sont forcément égaux.

Le cas avec $\cup$ et $\cap$ échangé est similaire, et devrait pouvoir être facilement déduit du cas précédent.

Solution 3.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{0, -1, -2, \dots\}$.

(b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\}$, ou mieux $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$.

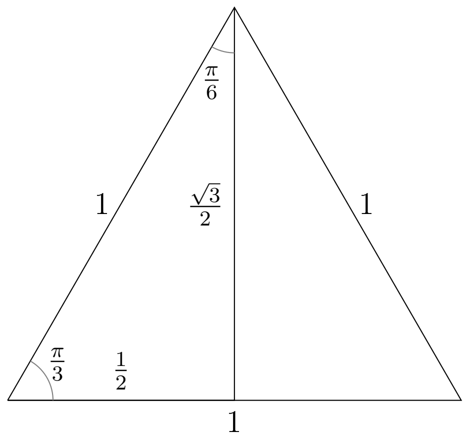
(c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est impair}\}$, ou mieux $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$.

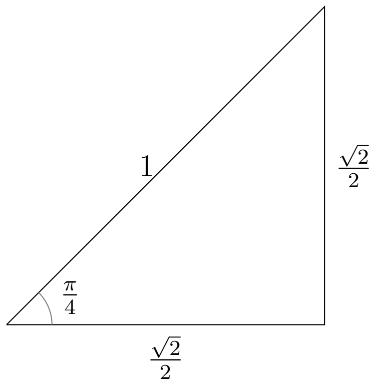
(d) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \neq 4\} = \{3, 6, 9, 15, 18, 21, \dots\}$.

Solution 4.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π	$-\alpha$	$\alpha+\pi/2$	$\alpha+\pi$	$\alpha+2\pi$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	0	$-\tan(\alpha)$	$-\cot(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\tan(\alpha)$

Les valeurs pour $\pi/6$ et $\pi/3$ (resp. $\pi/4$) se trouvent en calculant les hauteurs et les côtés d'un triangle équilatéral (resp. rectangle) d'hypoténuse 1. Le reste des valeurs se trouvent en contemplant le cercle trigonométrique.





Solution 5.

(a) Soient $x_1, x_2 \in X$. Si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (appliquer $g(...)$ des deux côtés), et donc $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Cela montre que f est injective. Pour la surjectivité de g, soit $x \in X$. On pose $y = f(x)$, et on a $g(y) = g(f(x)) = x$, donc x est l'image de y par g. Comme $x \in X$ était arbitraire, tous les x sont atteints, et g est donc surjective.

(b) On peut prendre $X = \{0\}, Y = \{1, 2\}$ et f qui envoie $0 \mapsto 1$ et g qui envoie $1 \mapsto 0$ et $2 \mapsto 0$.

Solution 6.

(a) $D = \mathbb{R}, I = \mathbb{R}$, la fonction est bijective donc on doit prendre $A = D = \mathbb{R}$, la réciproque est $\frac{1-x}{2}$.

(b) $D = \mathbb{R}, I = \mathbb{R}$, la fonction est bijective donc on doit prendre $A = D = \mathbb{R}$, la réciproque est $\sqrt[n]{x}$.

(c) $D = \mathbb{R}, I = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. La fonction n'est pas injective: $1^n = 1 = (-1)^n$ si n est pair. On peut restreindre la fonction à $A = \mathbb{R}_+$, elle devient alors bijective, de réciproque $\sqrt[n]{x}$. On aurait aussi pu choisir $A =]-\infty, 0]$; elle serait alors également bijective, de réciproque $-\sqrt[n]{x}$.

(d) $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = I$. La fonction est bijective donc on doit prendre $A = D = \mathbb{R}^*$, la réciproque est $\frac{1}{x}$.

(e) $D = \mathbb{R}, I =]-\infty, 1]$ (la fonction est maximale en $x = 0$). La fonction n'est pas injective: $1 - 1^2 = 0 = 1 - (-1)^2$. On peut restreindre la fonction à $A = \mathbb{R}_+$, elle devient alors bijective, de réciproque $\sqrt{1 - x}$.

(f) $D = \mathbb{R}, I = [-13, +\infty[$: En effet, on a $x^2 - 8x + 3 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 3 = (x - 4)^2 - 13$, elle est donc minimale en $x = 4$ et de valeur minimale -13. La fonction n'est pas injective: 3 et 5 sont tout deux envoyés sur -12. On peut restreindre la fonction à $A = [4, +\infty[$, elle devient alors bijective. Pour sa réciproque on a $y = (x - 4)^2 - 13 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = y + 13 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{y + 13}$ Donc si on se restreint à $x \in [4, +\infty[$, sa réciproque est $4 + \sqrt{x + 13}$.

(g) $D=\mathbb{R}, I=[-1,1]$. La fonction n'est pas injective: $\sin(2\cdot 0)=0=\sin(2\cdot\pi)$. sin est injective sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, on peut donc restreindre la fonction à $A=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$, elle devient alors bijective, de réciproque $\frac{1}{2}\arcsin(x)$.

(h) $D=\mathbb{R}\setminus\{\text{zéros de }\cos\}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}, I=\mathbb{R}$. La fonction n'est pas injective: $2\tan(0)=0=2\tan(\pi)$. On peut restreindre la fonction à $A=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, elle devient alors bijective, de réciproque $\arctan(\frac{1}{2}x)$.

(i) $D=\mathbb{R}, I=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ car $\frac{\pi}{4}\sin(x)$ prend des valeurs dans $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$, et donc $\sin(\frac{\pi}{4}\sin(x))$ prend des valeurs dans $[\sin(-\frac{\pi}{4}),\sin(\frac{\pi}{4})]=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$. La fonction n'est pas injective: $\sin(\frac{\pi}{4}\sin(0))=0=\sin(\frac{\pi}{4}\sin(\pi))$. On peut restreindre la fonction à $A=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, elle devient alors bijective, et a comme réciproque $\arcsin(\frac{4}{\pi}\arcsin(x))$.

(j) $D=\mathbb{R}$ (car x^2+1 n'est jamais 0), $I=]0,1]$ (car maximale en $x=0$). La fonction n'est pas injective: -1 et 1 sont tout deux envoyés sur $\frac{1}{2}$. On peut restreindre la fonction à $A=\mathbb{R}_+$, elle devient alors bijective. Pour sa réciproque on a $y=\frac{1}{x^2+1}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y}-1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{y}-1}$. Donc si on se restreint à $x\in\mathbb{R}_+$, sa réciproque est $\sqrt{\frac{1}{x}-1}$.

(k) $D=[-5,5]$, car la fonction est bien définie si $25-x^2\geq 0\Leftrightarrow 25\geq x^2\Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$. $I=[-1,4]$, car $\sqrt{25-x^2}$ est une valeur entre 0 et 5, donc $f(x)$ est entre -1 et 4. La fonction n'est pas injective: -5 et 5 sont tout deux envoyés sur -1. On peut restreindre la fonction à $A=[0,5]$, elle devient alors bijective. Pour sa réciproque on a $y=\sqrt{25-x^2}-1\Leftrightarrow(y+1)^2=25-x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{25-(y+1)^2}$. Donc si on se restreint à $x\in[0,5]$, sa réciproque est $\sqrt{25-(x+1)^2}$.

(l) $D=]-\infty,2]$, car $1+\frac{1}{x-1}$ est bien défini si $x\leq 0$ et $\sqrt{4-x^2}$ est définie si $4-x^2\geq 0$, donc si $0\leq x\leq 2$. $I=[0,2[$, car si $0<x\leq 2$, $\sqrt{4-x^2}$ prend des valeurs dans $[0,2[$, et si $x\leq 0$, $1+\frac{1}{x-1}$ prend des valeurs dans $[0,1[$, donc n'ajoute pas de "nouveaux" éléments à l'image. La fonction n'est pas injective: 0 est envoyé sur $1+\frac{1}{0-1}=0$, et 2 sur $\sqrt{4-2^2}=0$. On peut restreindre la fonction à $A=]0,2]$, elle devient alors bijective, de réciproque $\sqrt{4-x^2}$.

Solution 7.

(a) Si $x\geq 0$, alors $\sqrt{x^2}=x=|x|$. Et si $x\leq 0$, on pose $y=-x$, de sorte que $y\geq 0$. Par le cas précédent, $\sqrt{y^2}=y$, et comme $y^2=x^2$, on trouve $\sqrt{x^2}=y=-x=|x|$.

(b) Si $x\geq 0$, alors $|x|=x\geq 0$, et $|x|=0\Leftrightarrow x=0$. Et si $x\leq 0$, alors $-x\geq 0$ d'où $|x|=-x\geq 0$, et on a $|x|=0\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0$.

(c) On fait un tableau, et on constate l'égalité dans les deux dernières colonnes.

signe x	signe y	signe xy	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert xy\rvert$	$\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$
$+$	$+$	$+$	x	y	xy	xy
$+$	$-$	$-$	x	$-y$	$-xy$	$x(-y)=-xy$
$-$	$+$	$-$	$-x$	y	$-xy$	$(-x)y=-xy$
$-$	$-$	$+$	$-x$	$-y$	xy	$(-x)(-y)=xy$

(d) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$, et $-x \leq 0$, d'où $|-x| = --x = x = |x|$. Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$, et $-x \geq 0$, d'où $|-x| = -x = |x|$.

(e) On peut le voir en distinguant les cas des signes de x, y et $x+y$ (8 cas). Mais le plus simple est de mettre les deux côtés au carré, pour trouver

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad \text{et} \quad (|x|+|y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2.$$

Comme $2xy \leq 2|xy|$, on trouve $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$, et l'inégalité triangulaire suit en prenant la racine de chaque côté.

(f) Comme $y - x = -(x-y)$, on a $|y-x| = |-(x-y)| = |x-y|$ par le point (d). L'interprétation en terme de distance se voit alors graphiquement, en représentant x et y sur une droite réelle.

Solution 8.

(a) $n < 0$ ou $n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right[$.

(b) On a $|\frac{n-1}{n} - 1| = |\frac{n-1-n}{n}| = |\frac{-1}{n}| = |\frac{1}{n}|$. Si $n > 0$, on trouve $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \in \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right[$ comme au (a), et si $n < 0$, on a $|\frac{1}{n}| = -\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \leq -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \in \left]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right[$. Donc la solution est

$$n \in \left]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right] \cup \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right[.$$

(c) On applique $\log_2$:

$$-n \leq \log_2(\varepsilon) \Leftrightarrow n \geq -\log_2(\varepsilon) = \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow n \in \left[\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), +\infty\right[.$$

Solution 9.

$$\begin{aligned}(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^n) &= -1 + x - x + x^2 - x^2 + \cdots + x^n - x^n + x^{n+1} \\ &= x^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

En divisant le tout par $x-1$, on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

où la dernière égalité vient du fait que $\frac{a-b}{c-d} = \frac{-(b-a)}{-(c-d)} = \frac{b-a}{c-d}$.

Solution 10.

(a) Faux. Par exemple $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(1) = 2, f(2) = 1$ et $f(x) = x$ si $x \geq 3$ est une autre fonction bijective (il en existe une infinité indénombrable).

(b) Vrai. Si $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ alors posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Alors $g(y_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g(y_2)$, donc $y_1 = y_2$ par injectivité de g. Donc $f(x_1) = y_1 = y_2 = f(x_2)$, d'où $x_1 = x_2$ par injectivité de f. Ainsi $g \circ f$ est injective.

(c) Vrai. Si $z \in Z$, il existe $y \in Y$ tel que $g(y) = z$ par surjectivité de g, et il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$ par surjectivité de f. Donc $g \circ f(x) = z$, et $g \circ f$ est surjective.

(d) Faux. La fonction constante $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 17$ est croissante (au sens large), mais pas injective.

(e) Faux. La fonction constante $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -14$ est croissante (au sens large), mais pas surjective.

(f) Vrai. C'est un résultat du cours.

(g) Faux. On peut par exemple considérer

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Elle n'est pas surjective, car $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En revanche elle est strictement croissante, car si $0 \leq x < y$, alors $f(x) = x + 1 < y + 1 = f(y)$, si $x < 0 \leq y$, alors $f(x) < 1$ et $f(y) \geq 1$, donc $f(x) < f(y)$, et si $x < y \leq 0$, on a $1 - x > 1 - y$ d'où $f(x) = \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-y} = f(y)$.

(On peut également simplement prendre $f(x) = e^x$, mais on a besoin d'outils plus avancés vus plus tard en cours pour démontrer rigoureusement qu'elle est strictement croissante sans être surjective).

(h) Faux. On peut prendre la fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est bijective (sa réciproque est elle-même !) donc injective. Mais elle n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante, donc pas strictement monotone.