

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

(a) $\sin(3x) = 3x - \frac{9x^3}{2} + x^3\varepsilon(x).$

(b) $\log(2+x) = \log(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x).$

(c) $\log(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x).$

(d) $\log(1+x-2x^2) = x - \frac{5x^2}{2} + \frac{7x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$

(e) $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x).$

(f) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x).$

(g) $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x).$

(h) On décompose: $\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x) + 2 - 4x + 8x^2 - 16x^3 + 32x^4 + x^4\varepsilon_2(x) = 3 - 3x + 9x^2 - 15x^3 + 33x^4 + x^4\varepsilon(x).$

(i) $e^{x^2} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!} + x^{2n}\varepsilon(x).$

(j) On a $f(x) = \frac{x}{9} \frac{1}{1 + (\frac{x}{3})^2} = \frac{x}{9} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{9^k} + x^{2n}\varepsilon(x) \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{9^{k+1}} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

Solution 2.

(a) On a $f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 + (\frac{4x}{3})}$. Si $|\frac{4x}{3}| < 1$, cette expression vaut

$$\frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2 \cdot 4^k}{3^{k+1}} x^k. \text{ C'est donc la Série de Taylor de } f(x)$$

en 0. La série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ converge pour $|x| < 1$, et diverge si $|x| \geq 1$, donc

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4x}{3}\right)^k$ converge si et seulement si $|\frac{4x}{3}| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{4}$. Le rayon de

convergence est donc $\frac{3}{4}$ et le domaine $]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$. Finalement, le développement

limité est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2 \cdot 4^k}{3^{k+1}} x^k + x^n\varepsilon(x).$

(b) On a $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}$. Si $|\frac{x-2}{3}| < 1$, cette expression vaut $\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x-2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-2)^k$. C'est donc la Série de Taylor de $f(x)$ en 2. La série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ converge pour $|x| < 1$, et diverge si $|x| \geq 1$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x-2}{3}\right)^k$ converge si et seulement si $|\frac{x-2}{3}| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 3 \Leftrightarrow x \in]-1, 5[$. Le rayon de convergence est donc 3 et le domaine $] -1, 5[$. Finalement, le développement limité est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{3^{k+1}} (x-2)^k + (x-2)^n \varepsilon(x)$.

(c) On a $f(x) = e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$. C'est donc la Série de Taylor de $f(x)$ en 0. La série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon est $+\infty$ et le domaine \mathbb{R} . Finalement, le développement limité est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x)$.

(d) On a $f(0) = \sinh(0) = 0$, $f'(0) = \cosh(0) = 1$, $f''(0) = \sinh(0) = 0$ et ainsi de suite. Donc $f^{(k)}(0) = 0$ si k est pair, et $= 1$ si k est impair. Donc la série de Taylor est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$. On ne peut hélas pas calculer le rayon à l'aide

des formules $\lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|^{-\frac{1}{k}}$ ou $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}$, car un terme sur deux est zéro, et ces expressions ne sont donc pas définies. En revanche, on peut appliquer le critère de D'Alembert directement à la série. On calcule

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)!}{|x|^{2k+1}} \frac{|x|^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{2k+3} = 0.$$

Comme $\rho < 1$, cette série converge tout le temps, donc son domaine est \mathbb{R} et son rayon est $+\infty$. Finalement le développement limité (d'ordre $2n+1$ en 0) est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$.

(e) Très similaire au cas précédent. La série de Taylor est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$. Son domaine est \mathbb{R} et le rayon est $+\infty$. Le DL (d'ordre $2n$ en 0) est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + x^{2n} \varepsilon(x)$.

(f) On a $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = -1$, $f''(\pi) = 0$, $f^{(3)}(\pi) = 1$, $f^{(4)}(\pi) = 0$, et ainsi de suite. C'est donc exactement les mêmes valeurs que $f(0), f'(0), \dots$ mais avec

un signe moins. Donc la série de Taylor est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (x-\pi)^{2k+1}$. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle converge encore avec $x-\pi$ à la place de x , et donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (x-\pi)^{2k+1}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Son domaine est donc \mathbb{R} et le rayon est $+\infty$. Finalement le développement limité (d'ordre $2n+1$ en π) est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (x-\pi)^{2k+1} + (x-\pi)^{2n+1} \varepsilon(x)$.

(g) On a $f(\frac{\pi}{2}) = 0, f'(\frac{\pi}{2}) = -1, f''(\frac{\pi}{2}) = 0, f^{(3)}(\frac{\pi}{2}) = 1, f^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = 0$ et ainsi de suite. C'est donc exactement les mêmes valeurs qu'au point précédent.

Ainsi, la série de Taylor est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (x-\frac{\pi}{2})^{2k+1}$. Le domaine est \mathbb{R} , le rayon $+\infty$ et le développement limité (d'ordre $2n+1$ en $\frac{\pi}{2}$) est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (x-\frac{\pi}{2})^{2k+1} + (x-\frac{\pi}{2})^{2n+1} \varepsilon(x)$.

(h) On a $f^{(k)}(1) = e$ pour tout k , donc la série de Taylor est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k$. Son rayon de convergence est $+\infty$ (facile avec d'Alembert, voir calcul analogue pour la série de e^x en 0), son domaine est \mathbb{R} et le DL d'ordre n en 1 est $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e}{k!} (x-1)^k + (x-1)^n \varepsilon(x)$.

(i) On a $\log(x) = \log(1+(x-1))$. Si $x-1 \in]-1, 1]$, cette expression vaut $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$. C'est donc la série de Taylor de $f(x)$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1]$, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$ converge si et seulement si $x-1 \in]-1, 1] \Leftrightarrow x \in]0, 2]$. Le rayon de convergence est donc 1 et le domaine $]0, 2]$. Finalement, le développement limité est donc $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k + (x-1)^n \varepsilon(x)$.

(j) Même idée qu'au point précédent, $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$. Si $|x-1| < 1$, cette expression vaut $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$. C'est donc la série de Taylor de $f(x)$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$ converge si et seulement si $x-1 \in]-1, 1[\Leftrightarrow x \in]0, 2[$. Le rayon de convergence est donc 1 et le domaine $]0, 2[$. Finalement, le développement limité est donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k + (x-1)^n \varepsilon(x).$$

(k) On s'aperçoit en dérivant que $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$. Comme $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ si $|x| < 1$, on trouve, en dérivant la série, que $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$. C'est donc la série de Taylor de $f(x)$. Son rayon de convergence est le même que celui de la série non-dérivée, donc 1, et on vérifie facilement que la série diverge si $|x| = 1$, donc le domaine est $] -1, 1[$. Finalement, le développement limité est donc $f(x) = \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + x^n \varepsilon(x)$.

Solution 3.

On utilise des développements limités dont l'ordre est choisi pour éliminer le dénominateur. Le reste est noté $\varepsilon(x)$ dans tous les cas, même s'il est sous-entendu que ce n'est pas le même $\varepsilon(x)$ à chaque fois.

(a) On utilise le DL₅ en 0:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left(x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{120} - \varepsilon(x) \right) = -\frac{1}{120}.$$

(b) Comme

$$e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - 2x + x^2 \varepsilon(x) = x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

et

$$x - \log(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right) = \frac{x^2}{2} - x^2 \varepsilon(x),$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2 \varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} - x^2 \varepsilon(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \varepsilon(x)}{\frac{1}{2} - \varepsilon(x)} = 2.$$

(c) Pour le développement limité d'ordre 6 du numérateur, il faut obtenir le développement limité d'ordre 5 de $\sin(\sin(x))$ et celui d'ordre 6 de $\sin(x)^2$.

Comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, il s'ensuit que

$$\sin(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin(x)^3}{3!} + \frac{\sin(x)^5}{5!} + \underbrace{\sin(x)^5 \varepsilon(\sin(x))}_{:= x^5 \varepsilon(x)},$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\sin(x)) \sin(x)^5}{x^5} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Pour les puissances de $\sin(x)$ on a :

$$\begin{aligned} \sin(x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + x^6 \varepsilon(x) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x)^3 &= \sin(x)^2 \sin(x) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5 \varepsilon(x) \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) \right) \\ &= x^3 - \frac{x^5}{2} + x^5 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x)^5 &= \sin(x)^2 \sin(x)^3 = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5 \varepsilon(x) \right) \left(x^3 - \frac{x^5}{2} + x^5 \varepsilon(x) \right) \\ &= x^5 + x^5 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sin(\sin(x)) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6} \left(x^3 - \frac{x^5}{2} \right) + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^5 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + x^6 \varepsilon(x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{18} + \varepsilon(x) \right) = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \log(e^x - 2x) &= \log \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right) \\ &= \left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right) - \frac{1}{2} \left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right)^3 \\ &\quad + \left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right)^3 \varepsilon(x) \\ &= -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= -x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \log(e^x - 2x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} + \varepsilon(x) = \frac{1}{3}$$

Solution 4.

- (a) Observons que $\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \log(1-x) - \log(1+x)$. Ainsi on peut calculer la série complète de MacLaurin en additionnant terme par terme les séries de $\log(1-x)$ et $\log(1+x)$ (ceci est permis puisque les deux séries convergent pour $x \in]-1, 1[$). On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)}_{=\begin{cases} -\frac{2}{n}, n \text{ impair} \\ 0, n \text{ pair} \end{cases}} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Le développement limité est donc $f(x) = -2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + x^5\varepsilon(x)$.

- (b) Méthode 1: On a $\tan(x) = -(\log(\cos(x)))'$. On utilise alors les DL de $\cos(x)$ et $\log(1+x)$ pour trouver

$$\begin{aligned} \log(\cos(x)) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon(x)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon(x) - \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots)^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2} \dots)^3}{3} + x^6\varepsilon(x) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^6\left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2 \cdot 4!} - \frac{1}{24}\right) + x^6\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underbrace{\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right)}_{=\frac{16}{120} = \frac{2}{15}} x^5$$

Méthode 2: Utiliser l'égalité $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, le DL d'ordre 5 de $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$$

et celui d'ordre 4 de $\frac{1}{\cos(x)}$ (obtenu en combinant écrivant $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+(\cos(x)-1)}$ et en combinant les DL de $\cos(x)$ et $\frac{1}{1+x}$):

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x), \end{aligned}$$

Les trois premiers termes non nuls de la série sont donc $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$.

Méthode 3: Utiliser la définition de la série Taylor et donc calculer les dérivées de $f(x) = \tan(x)$ qui sont :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos(x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{2 + 4 \sin(x)^2}{\cos(x)^4},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{8 \sin(x) (2 + \sin(x)^2)}{\cos(x)^5}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{8 (2 + 11 \sin(x)^2 + 2 \sin(x)^4)}{\cos(x)^6},$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 16.$$

Ainsi

$$\tan(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + x^5\varepsilon(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

et les trois premiers termes non nuls de la série sont donc toujours $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$.

(c) Méthode 1: On a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ si $|x| < 1$. Ainsi la série de $f(x)$ est donnée par

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

où $C = \arctan(0) = 0$. Les trois premiers termes non-nuls sont donc:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

Méthode 2: On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3},$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 24.$$

Ainsi

$$\arctan(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{24}{5!}x^5 + x^5\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

et les trois premiers termes non nuls sont $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$.

Solution 5.

On procède comme dans la preuve que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ vue en cours. La formule de Taylor pour les développements limités donne $\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{x^{2n+1} \varepsilon(x)}_{=r_{2n+1}(x)}$.

L'estimation du reste donne

$$|r_{2n+1}(x)| \leq |\sin^{(2n+2)}(u)| \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, car les dérivées de \sin en 0 sont toujours ± 1 . Ainsi le reste tend vers 0, et on a $\sin(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x)}_{=0}$.

Solution 6.

(a) On sépare la somme en deux termes

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx &= \int \left(\frac{3x}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \log(1+x^2) + 4 \arctan(x) + C. \end{aligned}$$

(b) Méthode 1: On utilise que la fonction à intégrer est une dérivée en chaîne

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} = -f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = -\left(F(\varphi(x))\right)',$$

avec $\varphi(x) = \cos(x)$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - C$ une primitive de F . Ainsi

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx = -\left(-\frac{1}{2\cos(x)^2} - C\right) = \frac{1}{2\cos(x)^2} + C.$$

Méthode 2: On remarque que

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx = \int \tan(x) \frac{1}{\cos(x)^2} dx = \int \tan(x) (\tan(x))' dx = \frac{1}{2} \tan(x)^2 + C'$$

On note que les solutions obtenues par les méthodes 1 et 2 diffèrent seulement d'une constante. En effet, $\frac{1}{2} \tan(x)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos(x)^2} - 1 \right) = \frac{1}{2\cos(x)^2} + c$ avec $c = -\frac{1}{2}$.

(c) On remarque qu'il faut intégrer une composition avec une fonction affine, c.-à-d.

$$\frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}}.$$

Comme $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, la fonction $\arcsin(x) + C$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on obtient

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C.$$

(d) En utilisant la définition du sinus hyperbolique et une identité remarquable, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh(x)}{e^x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1 - (e^{-x})^2}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(1 + e^{-x})(1 - e^{-x})}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - e^{-x}) dx = \frac{1}{2} (x + e^{-x}) + C. \end{aligned}$$

(e) Méthode 1: En faisant le changement de variable $y = \log x$ et $dy = \frac{dx}{x}$ on trouve que

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \log y + C.$$

Donc une primitive est donnée par $\log(\log x) + C$.

Méthode 2: On remarque que

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{(\log x)'}{\log x} dx = \log(\log x) + C.$$

Solution 7.

Comme en cours, pour une partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, on note

$$\text{Approx 1} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } \text{Approx 2} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Posons $A_1 = \sup\{\text{Approx 1}\}$ et $A_2 = \inf\{\text{Approx 2}\}$. Comme $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, on a $A_1 \leq f(b)(b - a)$ et $A_2 \geq f(a)(b - a)$. Donc ces quantités existent (dans \mathbb{R}) et il faut montrer qu'elles sont égales. Par construction l'Approx 1 est toujours \leq l'Approx 2, on a donc $A_1 \leq A_2$, et on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $A_2 \leq A_1 + \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, cela forcera $A_2 \leq A_1$ d'où $A_1 = A_2$, et f est intégrable.

Soit donc $\varepsilon > 0$. On choisit une partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de *finesse* $\delta > 0$, c'est à dire telle que $x_i - x_{i-1} \leq \delta$ pour tout i . On note a_1 l'Approx 1 correspondante, et a_2 l'Approx 2 correspondante.

Comme f est croissante, on remarque que

$$\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i),$$

d'où

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_i) - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^n \delta \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \delta \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

En fixant alors $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ on trouve donc une partition telle que $a_2 \leq a_1 + \varepsilon$. Ainsi

$$A_2 = \inf\{\text{Approx 2}\} \leq a_2 \leq a_1 + \varepsilon \leq \sup\{\text{Approx 1}\} + \varepsilon = A_1 + \varepsilon.$$