Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.
Posons $f_1(x) = x^2 - x + 3$ et $f_2(x) = \alpha x + \beta$. Il faut déjà que la fonction soit continue, c'est à dire que $3 = f_1(1) = f_2(1) = \alpha + \beta$. Dans ce cas, une proposition du cours (5.10) nous dit que la fonction est $\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow f_1'(1) = f_2'(1)$. On calcule $f_1'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f_1'(1) = 1$. Comme $f_2'(1) = \alpha$ on trouve $\alpha = 1$ et $1 + \beta = 3 \Rightarrow \beta = 2$. Dans ce cas, la dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On applique la proposition 5.10 du cours pour vérifier que $f_1''(x) = 2 \neq f_2''(x) = 0$, donc f n'est pas $\mathcal{C}^2$.

Solution 2.

- ☐ $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$
- ■ $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$
- ☐ $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$
- ☐ $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^5(\mathbb{R})$

Posons $f_1(x) = 2 + e^{-1/x^2}$ et $f_2(x) = 2\cos(x) + x^2$. Si $x < 0$ on a $f_1'(x) = e^{-1/x^2}\frac{2}{x^3}$, et on a donc $\lim\limits_{x \uparrow 0} f_1'(x) = 0$, d'où $f'_{1,\text{gauche}}(0) = 0$, cf preuve de la proposition 5.10 du cours. Récursivement, on peut montrer avec la même idée que toutes les dérivées à gauche de f_1 en 0 seront 0. Ainsi, $f_1(x)$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ via

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 + e^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Pour $f_2(x)$, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et admet le développement limité $f_2(x) = 2 + \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)$. Ainsi, les dérivées jusqu'à l'ordre 3 sont nulles, mais $f_2^{(4)}(0) \neq 0$. Par la proposition 5.10 du cours, la fonction est $\mathcal{C}^3$ mais pas $\mathcal{C}^4$.

Solution 3.
Par la remarque 5.12 du cours, si $\delta(x) = f'(x)$, alors on aurait

$$\delta(0) = f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = 0.$$

Comme $\delta(0) = 1$, ce n'est donc pas la dérivée d'une fonction.

Solution 4.
On utilise la règle de Bernoulli-L'Hospital à répétition.

(a) On a $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\log(x-1)}{x-2} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$

(b) On peut soit appliquer BH plusieurs fois (avec l'expression $\frac{\tanh(x)-1}{\frac{1}{x}}$), soit remarquer que

$$(\tanh(x)-1)x = \frac{\sinh(x)-\cosh(x)}{\cosh(x)}x = -\frac{e^{-x}}{\cosh(x)}x = -\frac{x}{e^x\cosh(x)}.$$

Donc $|(\tanh(x)-1)x| \leq \frac{x}{e^x} \to 0$ lorsque $x\to\infty$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty}(\tanh(x)-1)x = 0$.

(c) On commence par calculer la limite du log: $\lim_{x\to 0}\log\left((1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin(x))}{x} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\sin(x)}\cos(x)}{1} = 1$, d'où $\lim_{x\to 0}((1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

(d) On a $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x-\sin(x)} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x)^2}-\cos(x)}{1-\cos(x)} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}+\sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos(x)^3}+1 = 3$.

(e) On a $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{x\log(x)-(x-1)}{(x-1)\log(x)} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\log(x)-1+1}{\log(x)+1-\frac{1}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$.

(f) On calcule d'abord la limite du log: $\lim_{x\downarrow 0}\log(x^{\pi x}) = \lim_{x\downarrow 0}\pi\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\downarrow 0}\pi\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\downarrow 0}-\pi x = 0$. Donc $\lim_{x\downarrow 0}x^{\pi x} = e^0 = 1$.

(g) On a $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\tan(x)} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0}\sin(x)\cos(x)^2 = 0$.

(h) On a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan(x)-\frac{\pi}{2\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin(x)-\pi}{2\cos(x)} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(x)+2x\cos(x)}{-2\sin(x)} = -1$.

Solution 5.

(a) Points stationnaires: $0, -\frac{10}{3}$. Min local en 0, max local en $-\frac{10}{3}$. Point d'inflexion: $-\frac{5}{3}$. La fonction croît sur $[6, -\frac{10}{3}]$, décroît sur $[-\frac{10}{3}, 0]$ et croît sur $[0,1]$. Elle est concave sur $[-6, -\frac{5}{3}]$ et convexe sur $[-\frac{5}{3}, 1]$. Le maximum global est le maximum local en $-\frac{10}{3}$ et le minimum global est atteint au bord, en -6.

(b) Même chose qu'au (a), mais l'intervalle n'a pas d'extrémités, donc pas de minimum global (celui en -6 n'est jamais atteint).

(c) On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+\frac{5}{4} & -1\leq x\leq -\frac{1}{4} \\ x^2-x+\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\leq x\leq 1 \end{cases} \quad \text{et } f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & -1\leq x< -\frac{1}{4} \\ 2x-1 & -\frac{1}{4}< x\leq 1 \end{cases}$$

Comme $|x+\frac{1}{4}|$ n'est pas dérivable en $-\frac{1}{4}$, la fonction n'est pas dérivable en ce point. De plus, $f''(x) = 2$ si $x \neq -\frac{1}{4}$. Les points stationnaires sont en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Il s'agit de minimums locaux (car $f'' > 0$). Il n'y a pas de points d'inflexions. La fonction décroît sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, croît sur $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$, décroît sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ et croît sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Le point en $-\frac{1}{4}$ où f' n'est pas défini est donc un maximum local. f est convexe sur $[-1, -\frac{1}{4}]$ et sur $[-\frac{1}{4}, 1]$ (mais pas sur $[-1, 1]$!) Finalement le maximum global est atteint au bord, en $x = -1$, et le minimum global est le minimum local en $\frac{1}{2}$.

(d) Ici, $2-x < 0$ pour tout $x \in]2, 3[$, donc $f(x) = (x-1)^2+2(2-x)+1 = x^2-4x+6$. Ainsi $f'(x) = 2x - 4$ et $f''(x) = 2$. Il n'y a pas de points stationnaires ($f' > 0$ sur $]2, 3[$) donc pas d'extrema locaux, et pas de points d'inflexions (car $f'' > 0$). f est croissante et convexe sur $]2, 3[$. Pas de maximum / minimum globaux, car $]2, 3[$ n'a pas d'extrémités.

(e) La dérivée de $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$ est

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 + 1) - x^3(6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{9x^4 + 3x^2 - 6x^4}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2(x^2 + 1)}{(3x^2 + 1)^2}$$

$x = 0$ est le seul point stationnaire. On a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle n'admet pas d'extremums. De plus

$$f''(x) = \frac{-6x(x^2 - 1)}{(3x^2 + 1)^3}.$$

et f' a donc 3 points stationnaires en $-1, 0, 1$. On remarque que $f''(x)$ est > 0 avant -1, < 0 entre -1 et 0, > 0 entre 0 et 1, et finalement < 0 après 1. Les trois points sont donc des points d'inflexion, et f est convexe sur $]-\infty, -1]$ et sur $[0, 1]$, et concave sur $[-1, 0]$ et $[1, +\infty[$.

(f) On a $f'(x) = \log(x) + 1$ et $f''(x) = \frac{1}{x}$. Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, et c'est le seul point stationnaire. Comme $f''(e^{-1}) > 0$, c'est un minimum local. $f'(x) < 0$ si $x \in]0, e^{-1}[$, donc f décroît sur $]0, e^{-1}[$. $f'(x) > 0$ si $x \in]e^{-1}, +\infty[$, donc f croît sur $]0, e^{-1}[$. $f''(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$, donc f est convexe sur $]0, +\infty[$. Comme f décroît avant e^{-1} et croît après, f admet un minimum global en e^{-1}.

Solution 6.

☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3

La fonction est continue sur $[-1, 3]$ et on a $f(-1) = 1 - \frac{1}{5^5} > 0$ et $f(3) = \frac{1}{5^3} - 1 < 0$. Par le TVI, il existe $c \in]-1, 3[$ tel que $f(c) = 0$. Pour l'unicité, on remarque que la fonction est strictement négative dès que $x < -2$, et strictement positive dès que $x > 4$; il n'y a donc pas de zéros ici. Pour $x \in]-2, 4[$, on calcule

$$f'(x) = -\left(\frac{3}{(x + 2)^4} + \frac{5}{(x - 4)^6}\right) < 0.$$

La fonction est donc strictement décroissante dans cette région, donc injective (car continue), et il suit qu'il ne peut y avoir qu'au plus un zéro ici. Il y a donc exactement un zéro.

Solution 7.

(a) Par la caractérisation des suites, il suffit de montrer que $\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = \exp(x)$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t &= \lim_{t\to+\infty}\exp\left(\log\left(\left(1+\frac{x}{t}\right)^t\right)\right)\\ &= \exp\left(\lim_{t\to+\infty} t\log\left(1+\frac{x}{t}\right)\right)\\ &= \exp\left(\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+xy)}{y}\right) \overset{\text{BH}}{=} \exp\left(\lim_{y\to 0}\frac{\frac{x}{1+y}}{1}\right) = \exp(x),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé, par ordre d'apparition à l'écran, le fait que $a = \exp(\log(a))$, la continuité de exp, la propriété $\log(a^b) = b\log(a)$, le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ et la règle de Bernoulli-L'Hospital.

(b) On le montre par récurrence sur le degré n de $p(x)$. Si $p(x)$ est de degré 0, p est une constante, donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{e^x} = \frac{c}{+\infty} = 0$. Si $p(x)$ est de degré $n+1$, $p'(x)$ est un polynôme de degré n, et on a donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{e^x} = 0$ par récurrence. Ainsi, par Bernoulli-L'Hospital, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{e^x} = 0.$$

Solution 8.

(a) C'est une récurrence linéaire. Comme $|q| = \frac{1}{4} < 1$, la suite converge pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$. La limite est solution de $x = \frac{x+3}{4} \Leftrightarrow x = 1$.

(b) C'est une récurrence linéaire. Comme $|q| = \frac{3}{2} > 1$, la suite diverge, sauf si $a_0 =$ solution de $x = \frac{1}{2}(2-3x)$, i.e., $a_0 = \frac{2}{5}$. Ainsi, (a_n) diverge pour tout $a_0 \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\}$, et est constante $= \frac{2}{5}$ si $a_0 = \frac{2}{5}$.

(c) On a $g(x) = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+x}$. Les candidats pour la limite ℓ sont les solutions de $g(x) = x$, donc $\ell = -\frac{2}{3}$, et $\ell = 2$. Une étude de $g(x)$ et de $g(x) - x$ montre que

- $2 \leq g(x) \leq x$ dès que $x \geq 2$. Ainsi, la suite converge vers 2 si $a_0 \geq 2$, par décroissance minorée.
- $x \leq g(x) \leq 2$ si $x \in \left]-\frac{2}{3}, 2\right[$. La suite converge donc vers 2 si $a_0 \in \left]-\frac{2}{3}, 2\right[$, par croissance majorée.
- La suite est constante $= -\frac{2}{3}$ si $a_0 = -\frac{2}{3}$.

(d) On a $g(x) = \frac{x^2+6}{5}$ Les candidats pour la limite ℓ sont les solutions de $g(x) = x$, donc $\ell = 2$, et $\ell = 3$. Une étude de $g(x)$ et de $g(x) - x$ montre que

- $g(x) \geq x$ dès que $x > 3$. La suite est donc croissante dès que $a_0 > 3$, et diverge (car tous les candidats pour la limite sont ≤ 3)
- La suite est constante $= 3$ si $a_0 = 3$

- $2 \leq g(x) \leq x$ si $x \in [2, 3[$. Ainsi la suite converge vers 2 si $a_0 \in [2, 3[$, par décroissance minorée.
- $x \leq g(x) \leq 2$ si $x \in [-2, 2[$. Ainsi la suite converge vers 2 si $a_0 \in [-2, 2[$, par croissance majorée.
- Si $a_0 \in]-3, -2[$, alors $a_1 = g(a_0) \in [2, 3[$, donc la suite converge vers 2.
- Si $a_0 = -3$, alors $a_1 = 3$ et la suite est constante à partir de là.
- Si $a_0 \in]-\infty, -3[$, alors $a_1 = g(a_0) \in]3, +\infty[$, et la suite diverge.

(e) On a $g(x) = \frac{2}{x} + 1$. Le seul candidat pour la limite est $\ell = 2$ (l'autre solution de $g(x) = x$ est négative. Une étude de $g(x)$ montre que $g(x) \leq 2$ si $x \geq 2$ et $g(x) \geq 2$ si $x \leq 2$. Ainsi, la suite va alterner entre des valeurs ≥ 2 et ≤ 2. En prenant les sous-suites $b_k = a_{2k}$ et $c_k = a_{2k+1}$, l'une est ≥ 2 et l'autre est ≤ 2, et les deux sont définies par récurrence à l'aide de la fonction $h(x) = g \circ g(x)$ via:

$$b_0 = a_0, b_{k+1} = h(b_k), \quad c_0 = a_1, c_{k+1} = h(c_k).$$

On calcule $h(x) = \frac{2+3x}{2+x} = 3 - \frac{4}{2+x}$. Une étude de $h(x)$ et de $h(x) - x$ similaire à celle du point (c) montre que b_k converge vers 2 si $b_0 = a_0 > 0$ et que c_k converge vers 2 si $c_0 = a_1 > 0$. Comme a_0 et a_1 sont positifs, on conclut que $b_k \to 2$ et $c_k \to 2$, donc que $a_n \to 2$ pour tout $a_0 \in]0, +\infty[$.

(f) On a $g(x) = -3x^3$. Le seul candidat pour la limite est $\ell = 0$. Une étude de $g(x)$ montre que $g(x) \leq 0$ si $x \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ si $x \leq 0$. Ainsi, la suite va alterner entre des valeurs positives et négatives. En prenant les sous-suites $b_k = a_{2k}$ et $c_k = a_{2k+1}$, l'une est négative et l'autre est positive, et les deux sont définies par récurrence à l'aide de la fonction $h(x) = g \circ g(x)$ via:

$$b_0 = a_0, b_{k+1} = h(b_k), \quad c_0 = a_1, c_{k+1} = h(c_k).$$

On calcule $h(x) = -3(-3x^3)^3 = 3^4x^9$; les solutions de $h(x) = x$ sont donc

$$3^4x^9 = x \Leftrightarrow x((\sqrt{3}x)^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Une étude de $h(x)$ et de $h(x) - x$ montre alors que b_k converge vers 0 si et seulement si $b_0 = a_0 \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\Leftrightarrow |a_0| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Le même argument appliqué à c_k montre que $c_k \to 0 \Leftrightarrow |c_0| = |a_1| = 3|a_0|^3 < \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |a_0| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ Ainsi, la suite (a_n) converge vers $0 \Leftrightarrow |a_0| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dans tous les autres cas, la suite diverge. (Elle boucle sur $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ si $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, et $|a_n|$ diverge si $|a_0| > \frac{1}{\sqrt{3}}$).

Solution 9.

(a) Vrai. Vu en cours.

(b) Vrai. Vu en cours.

(c) Vrai. Vu en cours.

(d) Faux. Vu en cours: $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur tout intervalle, mais $f'(0) = 0$.

Solution 10.

Toutes les phrases sans $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ sont **vraies** (et sans intérêt). Par exemple: $\cos(x) = 1 + 2x^2 + x^4\varepsilon(x)$, il suffit de prendre

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-(1+2x^2)}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour les autres, on a les cas suivants:

$\cos(x) =$	reste	V/F	Raison
1	$x\varepsilon(x)$	Vrai	DL vu en cours
1	$x^{2,3,4}\varepsilon(x)$	Faux	Il manque les autres termes du DL
$1+x$	$x^{1,2,3,4}\varepsilon(x)$	Faux	Pas le bon DL
$1+2x^2$	$x\varepsilon(x)$	**Vrai**	$\varepsilon(x) = -2x + \varepsilon_1(x)$ où ε_1 est
			le reste du DL $\cos(x) = 1 + x\varepsilon_1(x)$.
$1+2x^2$	$x^{2,3,4}\varepsilon(x)$	Faux	Pas le bon DL
$1-\frac{1}{2}x^2$	$x\varepsilon(x)$	**Vrai**	Le reste du DL d'ordre 2 est de la forme
			$x^2\varepsilon(x) = x\underbrace{(x\varepsilon(x))}_{\to 0}$
$1-\frac{1}{2}x^2$	$x^{2,3}\varepsilon(x)$	Vrai	DL vu en cours
$1-\frac{1}{2}x^2$	$x^4\varepsilon(x)$	Faux	Il manque le terme $\frac{1}{24}x^4$