

## Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*<sup>1</sup> de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

---

1. (même parfois plusieurs jours)

**Solution 1.**

(a) On a

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{lorsque } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

On utilise en particulier le fait que  $g$  est continue en  $x_0$  car dérivable en  $x_0$ .

(b) La dérivée de  $\frac{1}{x}$  est  $-\frac{1}{x^2}$ , donc celle de  $\frac{1}{g(x)}$  est  $-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$  (règle des composées).  
On applique alors la règle du produit à  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$  pour démontrer la formule.

**Solution 2.**

(a)  $f'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$ ,  $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

(b)  $f'(x) = \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{-1}{\sin(x)^2} = -(1 + \cot(x)^2)$ ,  $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\sin(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

(c)  $f'(x) = \frac{5(3x^2 - 1) - 6x(5x + 2)}{(3x^2 - 1)^2} = -\frac{15x^2 + 12x + 5}{(3x^2 - 1)^2}$ , et  $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ .

(d)  $f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$ ;  $D(f) = D(f') = ]-1, 1[$

(e)  $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x^2) + \sin^2(x) \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x$   
 $= 2\sin(x)(\cos(x)\cos(x^2) - x\sin(x)\sin(x^2))$ ;  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ .

(f)  $f'(x) = 9(1 + \tan^2 x)\cos(2x) - 2(3 + 9\tan x)\sin(2x)$ ;  $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

(g)  $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x+3}}{x}\right) \left(\frac{x+6}{2(x+3)^{3/2}}\right)$ ;  $D(f) = D(f') = ]0, \infty[$ .

(h)  $f'(x) = \frac{d}{dx} 2e^x(x^2 - 1)^{-1} = 2e^x(x^2 - 1)^{-1} - 2e^x(x^2 - 1)^{-2}(2x)$ ;  $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

(i) Si  $x > 0$  ou  $x < 0$ , on calcule  $f'(x)$  à l'aide de la formule du produit des dérivées. Et pour  $x = 0$ , on revient à la définition de dérivée avec limites, et on trouve que la limite vaut 0. Donc  $f'(x) = \text{sgn}(x)(\sin(x) + x\cos(x))$  où  $\text{sgn}(x)$  vaut 1 si  $x > 0$ , -1 si  $x < 0$  et 0 si  $x = 0$ . On a  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ .

(j) Même idée qu'au point précédent, pas de problème si  $x \neq 0$ , et pour  $x = 0$ , on calcule la limite dans la définition de dérivée, pour trouver 0. Ainsi  $f'(x) = 3|x|x$ , et  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ .

(k)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  si  $x \in ]-1, 1[$  (vu en cours). On a  $D(f) = [-1, 1]$  et  $D(f') = ]-1, 1[$ .

(l) On utilise la proposition du cours. Soit  $g(x) = \cos(x)$  sur  $[0, \pi]$ . Alors  $g'(x) = -\sin(x)$  est non nulle sur  $]0, \pi[$ . On trouve donc

$$\arccos'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Comme  $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$  si  $x \in ]0, \pi[$ , on trouve

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On a  $D(f) = [-1, 1]$  et  $D(f') = ]-1, 1[$ .

(m) Même idée qu'au point d'avant, si  $g(x) = \tan(x)$  sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , alors  $g'(x) = 1 + \tan(x)^2 \neq 0$  si  $x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Donc

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

On a  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ .

(n) On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})}} \cos(\sqrt{\sin(x)}) \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) \\ &= \frac{\cos(\sqrt{\sin(x)}) \cos(x)}{4\sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)}) \sin(x)}}. \end{aligned}$$

Pour le domaine, on doit avoir  $\sin(x) \geq 0$  et  $\sin(\sqrt{\sin(x)}) \geq 0$  pour que les expressions sous la racine soient  $\geq 0$ . La première se traduit par  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$  (l'union de  $[0, \pi]$  et de tous ses translatés par des multiples entiers de  $2\pi$ ). Pour ces valeurs, on  $\sin(x) \in [0, 1]$ , donc  $\sqrt{\sin(x)} \geq 0$  et la deuxième condition est vérifiée. Ainsi  $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ .

Pour  $D(f')$ , les expressions sous la racines doivent encore être non nulles. Donc  $D(f') = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, (2k+1)\pi[$ .

(o)  $f'(x) = \frac{3}{5}(2x^4 + e^{-(4x+3)})^{-2/5}(8x^3 - 4e^{-(4x+3)})$ .  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ .

(p)  $f'(x) = e^{\cos(4x)} \log(4)(\cos(x) - 4\sin(4x)\sin(x))$ .  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ .

(q) Par définition,  $x^x = e^{\log(x)x}$  donc  $f'(x) = x^x(1 + \log(x))$ . On a  $D(f) = D(f') = ]0, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .

(r) On a  $f(x) = x^{e^{\log(x)x}} = e^{\log(x)e^{\log(x)x}}$ , donc  $f'(x) = x^{x^x}(x^{-1}x^x + \log(x)x^x(1 + \log(x))) = x^{x^x+x-1}(1 + x \log(x) + x \log(x)^2)$ .  $D(f) = D(f') = ]0, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .

**Solution 3.**

(a) Si  $k = 0$ ,  $f(x) = 1$  et donc  $f^{(n)}(x) = 0$  pour tout  $n$ . Si  $k > 0$ , on trouve

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} k(k-1) \cdots (k-n+1)x^{k-n} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Et si  $k < 0$ , on a  $f^{(n)}(x) = k(k-1) \cdots (k-n+1)x^{k-n}$  pour tout  $n$ .

(b) On commence par calculer les quatre premières dérivées de  $f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos(2x) - 2 \sin(x) & f''(x) &= -4 \sin(2x) - 2 \cos(x) \\ f'''(x) &= -8 \cos(2x) + 2 \sin(x) & f^{(4)}(x) &= 16 \sin(2x) + 2 \cos(x) \end{aligned}$$

Il faut donc distinguer deux cas selon la parité de  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (2^n \sin(2x) + 2 \cos(x)), & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2^n \cos(2x) - 2 \sin(x)), & n \text{ impair.} \end{cases}$$

(c) On a  $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ , d'où, en utilisant le (a), dès que  $n \geq 2$ ,

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \cdots (-1 - (n-1) + 1)x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

**Solution 4.**

(a) On pose  $h(x) = f(x) - \left( f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)) \right)$ . On calcule  $h(a) = 0$  et  $h(b) = 0$ . Par le théorème de Rolle, il existe  $u \in ]a, b[$  avec  $h'(u) = 0$ . Or

$$h'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(u) = 0,$$

et le TAF généralisé en découle.

(b) On applique le TAF généralisé avec la fonction  $g(x) = x$ .

**Solution 5.**

1                       0                        $1 + \frac{1}{e}$                         $\frac{1}{2}$

On sait que  $f^{-1}(1) = 0$  puisque  $f(0) = 1$ . Donc  $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ , où l'on a utilisé la proposition sur la dérivation de fonctions réciproques.

**Solution 6.**
  $\frac{1}{6}$ 
 2

 -1

 6

Si la droite tangente au point  $(-1, 2)$  est  $y = 6x + 8$ , on a  $f(-1) = 2$  et  $f'(-1) = 6$ , la pente de la droite tangente. Ainsi  $f^{-1}(2) = -1$  et  $(f^{-1})'(2) = 1/f'(-1) = 1/6$ .

**Solution 7.**

- (a)  $\exp_a$  est la composée  $g \circ f$  des fonctions bijectives  $f(x) = \log(a) \cdot x$  (linéaire) et  $g(x) = \exp(x)$ , c'est donc une fonction bijective. On vérifie que

$$\exp_a(\log_a(x)) = \exp\left(\log(a) \cdot \frac{\log(x)}{\log(a)}\right) = x \quad \text{et}$$

$$\log_a(\exp_a(x)) = \frac{\log(\exp(\log(a) \cdot x))}{\log(a)} = \frac{\log(a) \cdot x}{\log(a)} = x.$$

$\log_a$  est donc bien la réciproque de  $\exp_a$ .

- (b) On utilise toutes les propriétés de  $\exp$ , qui sont encore vraies pour  $\exp_a$ . On montre par récurrence que  $\exp_a(n) = a^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Init:  $\exp_a(1) = \exp(\log(a) \cdot 1) = a^1$ . Pas de rec:  $\exp_a(n+1) = \exp_a(n) \cdot \exp_a(1) = a^n \cdot a = a^{n+1}$ . Ensuite, on a, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\exp_a(-n) = \frac{1}{\exp_a(n)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Finalement, si  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on a

$$\left(\exp_a\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \exp_a\left(\frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}\right) = \exp_a(p) = a^p \stackrel{(\dots)^{1/q}}{\Rightarrow} \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}.$$

- (c) Simple application de la règle de dérivées des composées.  
 (d) On vérifie que la dérivée est  $> 0$  si  $a > 1$  et  $< 0$  si  $a < 1$ .  
 (e) On a  $\log_a(b^x) = \frac{\log(\exp(\log(b) \cdot x))}{\log(a)} = x \cdot \frac{\log(b)}{\log(a)} = x \cdot \log_a(b)$   
 (f) On a  $\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \frac{\log(x)}{\log(a)} \cdot \left(\frac{\log(b)}{\log(a)}\right)^{-1} = \frac{\log(x)}{\log(b)} = \log_b(x)$ .

**Solution 8.**

- (a) Vérification élémentaire.  
 (b) Vérification élémentaire.

- (c) Comme sa dérivée  $\sinh'(x) = \cosh(x)$  est  $> 0$ , la fonction est strictement croissante, donc injective. On calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty$ , donc son image est  $\mathbb{R}$ . Elle est donc bijective. Pour la réciproque, on pose  $y = \sinh(x)$  et on isole  $x$  (en posant  $t = e^x$ )

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = t - \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}.$$

Comme  $t = e^x > 0$ , il faut choisir le  $+$  et on trouve

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = \operatorname{arcsinh}(y).$$

- (d) Comme sa dérivée  $\cosh'(x) = \sinh(x)$  s'annule uniquement en 0, c'est le seul point stationnaire de  $\cosh(x)$  et on vérifie que c'est un minimum (car  $\cosh''(0) = \cosh(0) = 1 > 0$ ). On vérifie également que  $\sinh(x)$  est strictement positive pour  $x > 0$ , donc  $\cosh$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Finalement, comme  $\cosh(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty$ , l'image est  $[1, +\infty[$ , et la fonction est bijective (lorsque (co)restreinte à  $\cosh: [0, +\infty[ \rightarrow [1, +\infty[$ ). Le calcul de  $\operatorname{arccosh}$  est similaire au (c).

### Solution 9.

- (a)
  - Paire/Paire: Faux ; voir point suivant.
  - Paire/Impaire: Vrai.  $f'(x) = (f(x))' = (f(-x))' = -f'(-x)$  (où l'on a utilisé la règle de dérivation des composées à la dernière égalité), d'où  $f'(-x) = -f'(x)$ , et  $f'$  est impaire.
  - Impaire/Paire: Vrai.  $-f'(x) = (-f(x))' = (f(-x))' = -f'(-x)$ , d'où  $f'(-x) = f'(x)$  et  $f'$  est paire.
  - Impaire/Impaire: Faux. Voir point précédent.
- (b) Faux. Prendre par exemple  $f(x) = |x|$  qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours). Les dérivées latérales en 0 existent mais ne sont pas égales.
- (c) Faux. En prenant  $f(x) = x$ , on a  $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$  qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours).
- (d) Faux. Il suffit de prendre l'exemple du cours (donné par  $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ ) restreint à  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
- (e) Faux. Prendre par exemple  $f(x) = -|x + 3|$ . Cette fonction est dérivable partout sauf en  $-3$ , donc en  $x_0 = 0$ , mais  $f \circ f(x) = -| -|x + 3| + 3|$ , ce qui vaut  $-|x|$  dès que  $x \geq -3$ .  $f \circ f$  n'est donc pas dérivable en 0.
- (f) Vrai. En appliquant plusieurs fois la règle de dérivation de composées, on voit que  $f'(a) = 0$  multiplie l'expression, qui vaut donc 0.