Série 9

1. Déterminer dans chaque cas les domaines (maximaux) $D(f)$, $D(f')$, et la fonction dérivée $f'(x)$:

$$\text{(a) } f(x) = |x|; \quad \text{(b) } f(x) = x|x|; \quad \text{(c) } f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}; \quad \text{(d) } f(x) = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x^3}\right)^2}.$$

2. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, on définit $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x^\beta), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$
Déterminer pour quelles valeurs de α, β on a : (a) f dérivable sur $\mathbb{R}$; (b) $f \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Etudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 + x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

4. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1, \\ \alpha x + \beta, & x > 1, \end{cases}$ soit dérivable partout.
A-t-on alors $f \in C^1(\mathbb{R})$? Esquisser le graphe de f.

5. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\text{(a) } xe^x + 1 \geq e^x \geq x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad \text{(b) } x \geq \ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1} \quad \forall x > -1;$$

$$\text{(c) } \sin x > x\cos x \quad \forall x \in (0, 4\pi/3); \quad \text{(d) } \tan x < \frac{x}{1-x} \quad \forall x \in (0,1);$$

$$\text{(e) } x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x > 0; \quad \text{(f) } 1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x > 0.$$

Indication : Pour chaque inégalité, se ramener à l'étude du signe d'une fonction, étude que l'on mènera à bien par le calcul différentiel.

6. Calculer les limites suivantes :

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \quad \text{(b) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x^3}; \quad \text{(c) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}; \quad \text{(d) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2};$$

$$\text{(e) } \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}; \quad \text{(f) } \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \quad \text{(g) } \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{1/x}}; \quad \text{(h) } \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

7. Calculer les limites suivantes, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$:

$$\text{(a) } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}; \quad \text{(b) } \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x; \quad \text{(c) } \lim_{x\to 0^+} x^{x^\alpha}; \quad \text{(d) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}; \quad \text{(e) } \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}; \quad \text{(f) } \lim_{x\to 0} \frac{a^x - e^x}{x}.$$

8. Soit f une fonction continue en $a \in \mathbb{R}$ et dérivable dans un voisinage pointé de a. Prouver que, si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = F'$. Montrer que f satisfait la propriété de la valeur intermédiaire sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Indication : Fixer y entre $f(a)$ et $f(b)$ et considérer la fonction $\varphi(x) := F(x) - yx$.