SÉRIE 8

1. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $a \in D(f)$. On note
$$f(a^-) := \lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{et} \quad f(a^+) := \lim_{x \to a^+} f(x).$$
On dit que f a une *discontinuité simple* (ou *de première espèce*) en a si f est discontinue en a mais $f(a^-)$ et $f(a^+)$ existent. On dit que f a une *discontinuité de seconde espèce* en a si (au moins) une des limites $f(a^-)$ ou $f(a^+)$ n'existe pas ou est infinie.

   Déterminer la nature des points de discontinuité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$; (b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -2 \\ -x-2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ x+2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$;

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$; (d) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non constante, périodique et continue. Prouver que f possède une plus petite période $T > 0$, appelée la *période fondamentale* de f.
Indication : Procéder par l'absurde, en considérant une suite de périodes $(T_n) \subset (0, \infty)$ de f telle que $T_n \to 0$, ce dont on déduira que f est constante.

3. Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est périodique. A-t-elle une période fondamentale ?

4. ($\star$) Soient $-\infty < a < b < \infty$ et $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Démontrer que, pour tout $x \in (a,b)$, $f(x^-)$ et $f(x^+)$ existent et satisfont
$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \le f(x) \le f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t).$$
En déduire que, si $a < x < y < b$, alors $f(x^+) \le f(y^-)$.
Formuler et démontrer les résultats analogues pour une fonction g décroissante.

5. ($\star$) Prouver que l'ensemble D des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ est au plus dénombrable.
Indication : Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour construire une injection de D dans $\mathbb{Q}$.

6. ($\star$) Soient $-\infty < a < b < \infty$ et $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que f est uniformément continue sur $[a,b)$ si et seulement si elle peut être prolongée par continuité en b.

7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, alors f est uniformément continue. La réciproque est-elle vraie ?

8. (a) Montrer que la fonction $f(x) = 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $(0,\infty)$ mais qu'elle l'est sur $[a,\infty)$, pour tout $a > 0$.
   (b) Montrer que la fonction $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$, n'est pas uniformément continue.
   Indication : Utiliser les solutions des équations $\sin(x^2) = \pm 1$.

9. Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes :

(a) $f : (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$; (b) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$; (c) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

(d) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$; (e) $f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^x$; (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est continue et périodique.