

SÉRIE 7

1. (★) Soit $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1/f(x)) = 2$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
2. Prouver que la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est prolongeable par continuité en $x = 0$, et donner son prolongement \hat{f} .
3. Déterminer dans chaque cas si la fonction f est prolongeable par continuité et, si oui, donner le prolongement associé \hat{f} :
 - (a) $f(x) = \frac{|x|(x+1) + x}{x^2(x+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$;
 - (b) $f(x) = \frac{x\sqrt{\cos^2 x - 4 \cos x + 3}}{|x| \sin x}$, $\forall x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$.
4. Prouver que la fonction indicatrice de \mathbb{Q} , $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ est discontinue en tout point.
Indication : Pour chaque $a \in \mathbb{R}$ considérer deux suites $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ et $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui convergent vers a .
5. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 + x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
6. Prouver que, si $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe, alors f est bornée sur $[a, \infty)$.
7. Donner un exemple de fonction bornée sur $[0, 1]$ qui n'atteint ni son infimum ni son supremum.
8. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a la *propriété de la valeur intermédiaire* si f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Donner un exemple de fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui ait la propriété de la valeur intermédiaire mais qui ne soit pas continue sur $[0, 1]$.
9. Montrer que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ l'est aussi. Montrer que la réciproque est fausse.
10. Montrer que chacune des équations suivantes possède une solution dans \mathbb{R} :
 - (a) $x^2 - \frac{1}{x} = 1$,
 - (b) $e^x = x + 2$,
 - (c) $x + e^x + \ln(x) + \sin(x) = 0$,
 - (d) $P(x) = 0$, où $P \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme de degré impair.*Indication* : Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire.
11. Considérons une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Prouver qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prouver que f est constante.
13. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Prouver que :
 - (a) $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q} \implies f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - (b) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q} \implies f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
14. (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante, continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, et telle que

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
 Prouver qu'il existe $a > 0$ tel que $f(x) = a^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : Commencer par montrer que $f(0) = 1$, $f(-x) = f(x)^{-1}$ et $f(n) = f(1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.