

## SÉRIE 6

1. Etudier la nature des séries suivantes en appliquant les critères de comparaison :

$$(a) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1}, \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - 7n + 13}, \quad (c) \sum_{n \geq 1} a^{\sum_{k=1}^n 1/k} \quad (a > 0), \quad (d) \sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

2. Etudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad (c) \sum_{n \geq 1} a^{n^p} \quad (a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*),$$

$$(d) \sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}, \quad (e) \sum_{n \geq 1} \frac{P(n)}{n!} \quad (P \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}), \quad (f) \sum_{n \geq 1} P(n) a^n \quad (P \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}).$$

3. Etudier la nature des séries suivantes en appliquant d'abord le critère de condensation :

$$(a) \sum_{n \geq 3} \frac{1}{[\ln(\ln(n))]^{\ln(n)}}, \quad (b) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^{\alpha \ln(n)}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad (c) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha (\ln(n))^\beta}} \quad (\alpha, \beta \geq 0).$$

4. Etudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)!}{4^n (n!)^2}, \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2}, \quad (c) \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \right]^p \quad (p \in \mathbb{N}^*).$$

*Indication* : L'identité  $x^p - 1 = (x-1) \sum_{k=0}^{p-1} x^k$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) peut s'avérer utile.

5. Examiner la pertinence du critère du quotient/de la racine pour prouver que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < \infty$ , avant et après avoir fait une condensation avec  $a_n = 2^n$ .

6. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  une suite telle que  $n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Prouver que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \infty$ .

7. Déterminer dans chaque cas le plus grand domaine  $D(f) \subset \mathbb{R}$  où la fonction  $f$  est définie.

Puis trouver  $\inf_{D(f)} f$ ,  $\sup_{D(f)} f$  et déterminer, s'ils existent, les points de minimum et maximum de  $f$  :

$$(a) f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (c) f(x) = x^2 + 1,$$

$$(d) f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad (e) f(x) = \ln(1+x), \quad (f) f(x) = \ln(1+x^2),$$

$$(g) f(x) = \cos(\pi x), \quad (h) f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

*Indication* : N'hésitez pas à utiliser la dérivée des fonctions et les limites connues.