

SÉRIE 5

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^*$ satisfaisant $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \infty$.
2. (a) Montrer que la suite de terme général $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$, est de Cauchy.
 (b) Montrer que la suite de terme général $x_n = (-1)^{n-1}$, $n \geq 1$, n'est pas de Cauchy.
 (c) Montrer que la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$, est de Cauchy, et calculer sa limite.
3. (★) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $x_n = \sin(\ln(n))$ satisfait $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, mais n'est pas convergente

Indications : Esquisser le graphe de la fonction $f(x) = \sin(\ln(x))$, $x \geq 1$, pour saisir le phénomène. Construire deux sous-suites (n_k) et (n'_k) telles que $x_{n_k} \geq \sqrt{2}/2$ et $x_{n'_k} \leq -\sqrt{2}/2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Calculer dans chaque cas la somme de la série, à l'aide de la suite des sommes partielles :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+3)} \quad (c) \sum_{n \geq 2} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \quad (d) \sum_{n \geq 1} na^n, \quad \forall a \in (-1, 1)$$

Indication : Pour (d), calculer tout d'abord $(1-a)s_n$, où s_n est la somme des n premiers termes.

5. (a) Prouver qu'une série de nombres positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est bornée supérieurement.
 (b) En déduire que, pour tout $a \in (0, 1)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 1} n^\alpha a^n$ est convergente.
6. (a) Prouver la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Indication : Montrer que (x_n) est décroissante. Puis montrer que $x_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ en étudiant la monotonie de $y_n := x_n - \frac{1}{n}$. Ces résultats reposent sur l'encadrement $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

- (b) Déduire du point (a) que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ en appliquant successivement le critère de d'Alembert et celui de la racine. Conclusion ? (Voir aussi série 4, exercice 4 (a).)
8. (★★) On dit qu'une série $\sum a_n$ est *conditionnellement convergente* ssi $\sum a_n$ existe mais $\sum |a_n| = +\infty$. On appelle *réarrangement des termes de la série* toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Démontrer le *théorème de Riemann* : Soit $\sum a_n$ une série conditionnellement convergente, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors il existe un réarrangement σ des termes de $\sum a_n$ tel que $\sum a_{\sigma(n)} = \ell$.

Indications : (i) Définir $a_n^\pm := \frac{1}{2}(|a_n| \pm a_n)$ et montrer, tout d'abord, que $\sum a_n^- = \sum a_n^+ = +\infty$.

(ii) Il peut être instructif de considérer le cas particulier de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.