

## SÉRIE 4

1. Etudier la convergence des suites récurrentes  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  définies par :

(a)  $x_{n+1} = x_n - \ln(1 + x_n^2), \quad x_0 = \frac{1}{2}$

(b)  $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$

(c)  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{4}, \quad x_0 \geq 1$

(d)  $(\star) \quad x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n}, \quad x_0 > 0 \quad (a, b > 0)$

*Indication* : Commencer par montrer que les sous-suites  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones.

2.  $(\star\star)$  Démontrer le *théorème de Stolz-Cesàro* :

Soit deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  avec  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante, et  $a_n, b_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

$$\text{Si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

*Indication* : Reformuler le résultat en utilisant  $u_n := a_{n+1} - a_n$  et  $v_n := b_{n+1} - b_n$ .

3. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^p} \quad (p \in \mathbb{N}^*) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n)}{\ln(n!)} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p \quad (p \in \mathbb{N})$$

4. (a) Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ . Prouver la proposition suivante :

$$\text{si } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0, \infty), \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell.$$

La réciproque est-elle vraie ?

(b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .

5. (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

(b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$  pour tout polynôme  $P(x)$  de coefficient dominant positif.

*Indication* : Utiliser le théorème des deux gendarmes.

6. Démontrer les résultats suivants à l'aide des définitions de limite finie/infinie :

(a) Si  $(x_n)$  est bornée et  $y_n \rightarrow 0$ , alors  $x_n y_n \rightarrow 0$ .

(b) Si  $(x_n)$  est bornée et  $y_n \rightarrow \pm\infty$ , alors  $x_n / y_n \rightarrow 0$ .

(c) S'il existe  $\delta > 0$  tel que  $x_n \geq \delta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $y_n \rightarrow \pm\infty$ , alors  $x_n y_n \rightarrow \pm\infty$ .

(d) Si  $x_n \rightarrow a \neq 0$  et  $y_n \rightarrow \pm\infty$ , alors  $x_n y_n \rightarrow \pm \operatorname{sgn}(a) \infty$ .

(e) Si  $a > 1$  et  $x_n \rightarrow +\infty$ , alors  $a^{x_n} \rightarrow +\infty$ .

*Rappel* : Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction puissance  $t^\alpha$  est définie par  $t^\alpha := e^{\alpha \ln(t)}$ , pour tout  $t \in (0, \infty)$ .

7. Etudier dans chaque cas la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$  de terme général :

$$(a) u_n = \frac{n^2 \sin(n) - n \cos(n)}{n^3 + 1} \quad (b) u_n = \frac{(1+a)^n (1-n)}{n+1} \quad (a > 0) \quad (c) u_n = \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{n^{-1} \left(2 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$