Série 2

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.

2. Résolution de $x^2 = 2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 \leq 2\}$ et $s = \sup A$. Montrer que $s^2 = 2$.
   Indication : Prouver par l'absurde que $s^2 < 2$ et $s^2 > 2$ sont impossibles. Si $s^2 < 2$, construire $x > s$ tel que $x^2 \leq 2$.

3. Pour chacun des sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}$ donnés, dire si A est majoré, minoré, borné. Si A est majoré (resp. minoré), déterminer $\sup A$ (resp. $\inf A$). Justifier rigoureusement vos réponses.
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, 0 \leq x \leq 1\}$;
   (b) $A = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, 0 < x < 1\}$;
   (c) $A = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x \leq \sqrt{2}\}$;
   (d) $A = \{x_n = 1/n\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

4. (a) Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Montrer que si A est majoré, alors $\sup A$ est unique. De même, si A est minoré, $\inf A$ est unique.
   (b) Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides. On définit $A + B := \{a + b\,;\, a \in A, b \in B\}$ et $-A := \{-a\,;\, a \in A\}$. Démontrer que :
   (i) $\sup(-A) = -\inf(A), \quad \inf(-A) = -\sup(A)$;
   (ii) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B), \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
   (iii) Si $A \subset (0, \infty)$ et $B = \{1/a\,;\, a \in A\}$, alors $\sup(B) = 1/\inf(A)$ et $\inf(B) = 1/\sup(A)$.
   Rappel : si $E \subset \mathbb{R}$ n'est pas borné supérieurement, alors $\sup(E) := \infty$.
   (c) Prouver que $A \subset \mathbb{R}$ est borné ssi $\{|x|\,;\, x \in A\}$ est borné.

5. (a) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une collection dénombrable de sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$. Déterminer si, en général, les ensembles
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
   sont bornés. Justifier rigoureusement votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.
   (b) Montrer qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ fini est borné. Donner $\inf A$ et $\sup A$.

6. (a) Soit une fonction $f : A \longrightarrow B$, où A et B sont des ensembles arbitraires. Que peut-on dire de f si, pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ a :
   (i) au plus une solution $x \in A$?
   (ii) au moins une solution $x \in A$?
   (iii) une unique solution $x \in A$?
   (b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*,\ b, c \in \mathbb{R},$$
   n'est ni injective ni surjective.
   (c) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x$, est injective. Est-elle aussi surjective ?
   Contrainte : Il est interdit d'utiliser la notion de dérivée pour résoudre l'exercice !