Série 1

1. Démontrer (par récurrence) les propositions suivantes :
   (a) (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$ (ii) $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;
   (b) $n! \geq 2n - 1, \quad \forall n \geq 3$;
   (c) $\displaystyle(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (binôme de Newton).
   Indication : Prouver et utiliser la relation $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$, $1 \leq i \leq n$.
   On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$, où $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0! = 1$.

2. Démontrer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes de la valeur absolue :
   (a) $|xy| = |x||y|$;
   (b) $|x| = \sqrt{x^2}$;
   (c) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
   (d) $|x - y| \geq ||x| - |y||$;
   (e) $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ si $x \neq 0$.

3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2-x} = x$.
   (b) Soit une équation de la forme $E(x) = 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}$ (le domaine où l'expression $E(x)$ est définie), et S l'ensemble de ses solutions. Que peut-on conclure après un raisonnement du type
   $$E(x) = 0,\ x \in D \implies \text{... (calculs) ...} \implies x \in A\,?$$
   Et s'il on a partout des équivalences au lieu des implications ?

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   (a) $\displaystyle\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < x - 1$;
   (b) $|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1$.

5. Prouver que l'équation $x^2 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}_+ := \{r \in \mathbb{Q}\,;\, r \geq 0\}$.
   Indication : Commencer par démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, n est pair (resp. impair) ssi n^2 est pair (resp. impair).