Série de Noël ($\star$)

1. On considère la surface $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ (cor de Gabriel) engendrée par la rotation de l'arc de courbe
$$\left\{(x,y,z) = \left(x, \frac{1}{x}, 0\right) ; \, 1 \leq x < \infty\right\}$$
autour de l'axe Ox.
   (a) Montrer que le volume du domaine délimité par $\mathcal{C}$ et par le plan d'équation $x = 1$ vaut π.
   (b) Montrer que l'aire de $\mathcal{C}$ est infinie.

2. Pour $x > 0$, on définit la *fonction gamma* par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} \, \mathrm{d}y$.
Prouver les propriétés suivantes :
   (a) l'intégrale est convergente pour tout $x > 0$ (distinguer les cas $x \leq 1$ et $x > 1$) ;
   (b) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$;
   (c) $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ (intégrales de Bertrand) en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Comparer le résultat avec l'exercice 3 (c), série 6 (séries de Bertrand).

4. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = \pi/4$.
   Indication : On calculera $g'(x)$ en "dérivant sous l'intégrale" (sans justification).
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \, \mathrm{d}x$ (intégrales de Wallis).
   (a) Donner une expression explicite de I_{2k} et I_{2k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Indication : Calculer I_0, I_1, puis intégrer par parties.
   (b) Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.
   Indication : Montrer que $I_{n-1} \geq I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser (a).
   (c) Déduire de (a) et (b) la formule de Wallis : $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (2k-2) \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}\right]^2 = \pi$.
   Puis montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque $n \to \infty$.
   (d) A l'exercice 4, série 10, on a prouvé qu'il existe $\ell \in (e^{-1}, \infty)$ tel que $n! \sim \ell^{-1} \sqrt{n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ $(n \to \infty)$. Utiliser (c) pour montrer que $\ell^{-1} = \sqrt{2\pi}$, d'où la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ $(n \to \infty)$.

6. Le but de cet exercice est de prouver la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (problème "de Bâle", Euler 1741).
   (a) Calculer l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$.
   (b) Prouver que $\arcsin(x) = x + \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $\forall x \in (-1, 1)$.
   Indication : Le résultat de l'exercice 1 (b) (iii), série 12, reste vrai pour $x \in (-1, 1)$ et $\alpha < 0$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$ et conclure.
   Indication : On pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$ en se ramenant à une intégrale de Wallis.