Série 14

1. Prouver que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone, alors f est Riemann-intégrable.

   Indication : Utiliser le critère d'intégrabilité de Darboux-Cauchy et une subdivision équidistante de pas $\Delta x_i = (b-a)/n$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles :

$$\text{(a)} \int \frac{2x+5}{4x^2-12x+9}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(b)} \int \frac{3x^2+1}{(x^2+x)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(c)} \int \frac{x^6+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Les substitutions d'Euler permettent de transformer des intégrandes irrationnels en fonctions rationnelles, que l'ont sait toujours intégrer.

   (a) Pour $x \in (2, \infty)$, calculer l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)+\sqrt{x^2-3x+2}}$ en posant $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

   (b) Pour $x \in (0, 2)$, calculer l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{2x-x^2}}$ en posant $t = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

4. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$.
   Utiliser ce résultat pour calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(b)} \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Calculer les intégrales suivantes (où $a > 0$) :

$$\text{(a)} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(b)} \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(c)} \int_{-1}^0 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(d)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

6. Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \ (\lambda > 0); \quad \text{(b)} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(c)} \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x; \quad \text{(d)} \int_{-2}^4 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\,\mathrm{d}x.$$

7. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\text{(a)} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x; \ \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x; \ \text{(c)} \int_2^{\infty} \frac{\ln x - 1}{(\ln^2 x+1)\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x; \ \text{(d)} \int_0^{\infty} \sin(e^{-x})\,\mathrm{d}x;$$

$$\text{(e)} \int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\right)\mathrm{d}x; \quad \text{(f)} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x; \quad \text{(g)} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x; \quad \text{(h)} \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$$