Série 13

1. Soit $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de $f\big|_{(a,b)}$. Montrer qu'il existe une primitive $\widetilde{F} : [a,b) \to \mathbb{R}$ de f telle que $F = \widetilde{F}\big|_{(a,b)}$ et $\widetilde{F}(a) = \lim_{x\to a^+} F(x)$.

2. Calculer la dérivée de la fonction $g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(t) = \displaystyle\int_{1/t}^{t} \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer les primitives suivantes en précisant leur domaine de définition :

   (a) $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;

   (f) $\displaystyle\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$; (g) $\displaystyle\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$; (i) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$; (j) $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$;

   (k) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$; (l) $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$; (m) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$; (n) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

   Indication : Intégration par parties.

4. Calculer les primitives suivantes :

   (a) $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ sur chacun des intervalles $(0,\infty)$ et $[0,\infty)$;

   (b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x$ sur chacun des intervalles $(-1,\infty)$ et $[-1,\infty)$;

   (c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x-2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ sur chacun des ensembles $[1,2)$, $(2,\infty)$ et $[1,2)\cup(2,\infty)$.

   Indication : Changement de variable.

5. Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$ sur $(-\pi,\pi)$ et sur $\mathbb{R}$.

6. (a) Déterminer les primitives suivantes, pour tout $k \in \mathbb{R}$: (i) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+k^2}\,\mathrm{d}t$; (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2-k^2}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Utiliser ces résultats pour montrer que, pour tout $a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$:

   — si $b^2-4ac<0$: $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$;

   — si $b^2-4ac=0$: $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{2ax+b} + C$;

   — si $b^2-4ac>0$: $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C$.

   (c) Calculer : (i) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x$; (ii) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

7. ($\star$) Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés, on considère les intégrales indéfinies

$$I_n(t) = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calculer I_1 et I_2.

   (b) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, pour tout $n \geq 2$.