

## SÉRIE 12

1. Etudier dans chaque cas la représentation de  $f$  en série de Taylor autour de zéro en suivant les étapes :

- (i) écrire la formule de Taylor d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  (avec reste de Lagrange) ;
- (ii) déterminer le rayon de convergence  $R > 0$  de la série de Taylor correspondante ;
- (iii) prouver que la série de Taylor converge uniformément vers  $f$  sur le domaine donné.

(a)  $f : [-\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x)$ ;      (b)  $f : [-\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1+x)^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ).

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  et déterminer le D.L. d'ordre  $n$  de  $f$  en zéro, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Utiliser une série entière pour retrouver le résultat

$$\ln(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

démonstré à l'exercice 5, série 5.

4. Etudier la fonction  $f(x) = x^x$ , et trouver sa représentation graphique.

5. Démontrer les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y); \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y); \\ \sinh(x) &= \frac{2 \tanh(x/2)}{1 - \tanh^2(x/2)}; \quad \cosh(x) = \frac{1 + \tanh^2(x/2)}{1 - \tanh^2(x/2)}. \end{aligned}$$

6. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\sinh \frac{x}{2} + \cosh \frac{x}{2} \coth x = -\frac{7}{6} e^{-x/2}.$$

7. Prouver que

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

8. Calculer, là où elles sont définies, les dérivées des fonctions suivantes :

(a)  $f(x) = \arcsin(\tanh x)$ ;      (b)  $f(x) = \operatorname{argtanh}(\tan x)$ ;      (c)  $f(x) = (2x^2 + 1) \operatorname{argsinh} x - x\sqrt{1+x^2}$ .

9. Calculer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2^x)^{1/x}$ ;      (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{argtanh} x - \arctan x}{\sinh x - \sin x}$ ;      (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sinh x}$ .

10. Etudier la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{cotanh} x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$ , et trouver sa représentation graphique.