SÉRIE 11

1. Déterminer les développements limités des fonctions suivantes autour du point $a$ et à l'ordre $n$ donnés :

$$\text{(a) } f(x) = \arcsin(x),\ a = 0,\ n = 5; \quad \text{(b) } f(x) = \arcsin(x),\ a = 1/2,\ n = 3;$$
$$\text{(c) } f(x) = x^4 - x^2 + 1,\ a = 0,\ n = 4; \quad \text{(d) } f(x) = x^4 - x^2 + 1,\ a = 1,\ n = 4;$$
$$\text{(e) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ a = 0,\ n = 3; \quad \text{(f) } f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2},\ a = 1,\ n = 4;$$
$$\text{(g) } f(x) = \sqrt{\tan(x)},\ a = \pi/4,\ n = 3.$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+x^2}}{x^2}; \quad \text{(b) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}; \quad \text{(c) } \lim_{x\to 0} \frac{6\arcsin(x) - 6x - x^3}{x^5};$$
$$\text{(d) } \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin^2(x)}{x^6}; \quad \text{(e) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)}.$$

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, et deux fonctions $f, g : E \to \mathbb{R}$, telles que $f_n \xrightarrow{U} f$ et $g_n \xrightarrow{U} g$ lorsque $n \to \infty$. Prouver que $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{U} \alpha f + \beta g$.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy ssi il existe une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{U} f$ lorsque $n \to \infty$.

5. Etudier la convergence (ponctuelle et uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sur les intervalles $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ et $[1,\infty)$.

6. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{nx^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction dérivable sur $[-1,1]$, la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement, mais $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \neq \lim_{n\to\infty} f_n'$. Comparer cette situation avec les hypothèses du théorème de dérivation des suites de fonctions.

7. Etudier la convergence (ponctuelle et uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = nx^n(1-x), \quad n \in \mathbb{N},$$

sur les intervalles $[0,1]$ et $[0,c]$, pour $c \in (0,1)$.