



1













Enseignant: F. Genoud
Analyse Avancée I - PH
17 janvier 2025
Durée : 210 minutes

Isaac Newton

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 15 questions et 32 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 100 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant (ou carte d'identité) bien visiblement sur la table.
- Vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER ci-dessus.
- Aucun document n'est autorisé.
- **L'utilisation d'une calculatrice et de tout appareil électronique est interdite.**
- Pour les questions à choix multiple, vous obtiendrez:
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo à encre noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du correcteur blanc si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace dédié. **Aucune feuille supplémentaire ne sera fournie.**
- Les brouillons ne doivent pas être rendus, ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Formulaire

Développement limité de quelques fonctions

$f(x)$	Développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

**Première partie, questions à choix multiple (20 points)**

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte.
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ une suite telle que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Laquelle des affirmations suivantes est-elle FAUSSE?

- Si $L = 0$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge.
 Si $L \in (0, \infty)$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ diverge.
 Si $L = \infty$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ diverge.

Question 2 (3 points)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

- $= +\infty$
 $= -\infty$
 $= 0$
 $= 1/2$

Question 3 (4 points)

Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/3} \sin^4(x) dx :$$

- $\frac{\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{128}$
 $\frac{\pi}{8} - \frac{9}{64}$
 $\frac{\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{64}$
 $\frac{\pi}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{64}$

Question 4 (5 points)

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x(\cosh(x))^{1/x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Le coefficient de x^4 dans le développement limité à l'ordre 4 de g en $x = 0$ vaut

- $-\frac{1}{32}$
 $-\frac{1}{8}$
 $\frac{1}{16}$
 $-\frac{1}{16}$

Question 5 (3 points)

Laquelle des fonctions suivantes est-elle uniformément continue sur $[0, \infty)$?

- $\sin(x^2)$
 \sqrt{x}
 e^x

**Question 6** (3 points)Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors:

- $f'(0)$ et $f''(0)$ n'existent pas.
- $f'(0) = 0$ et $f''(0)$ n'existe pas.
- $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 1$.
- $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.



Deuxième partie, questions ouvertes (80 points)

Répondre dans l'espace dédié. Toutes les étapes de votre raisonnement et de vos calculs doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher, elles sont réservées à la correction.

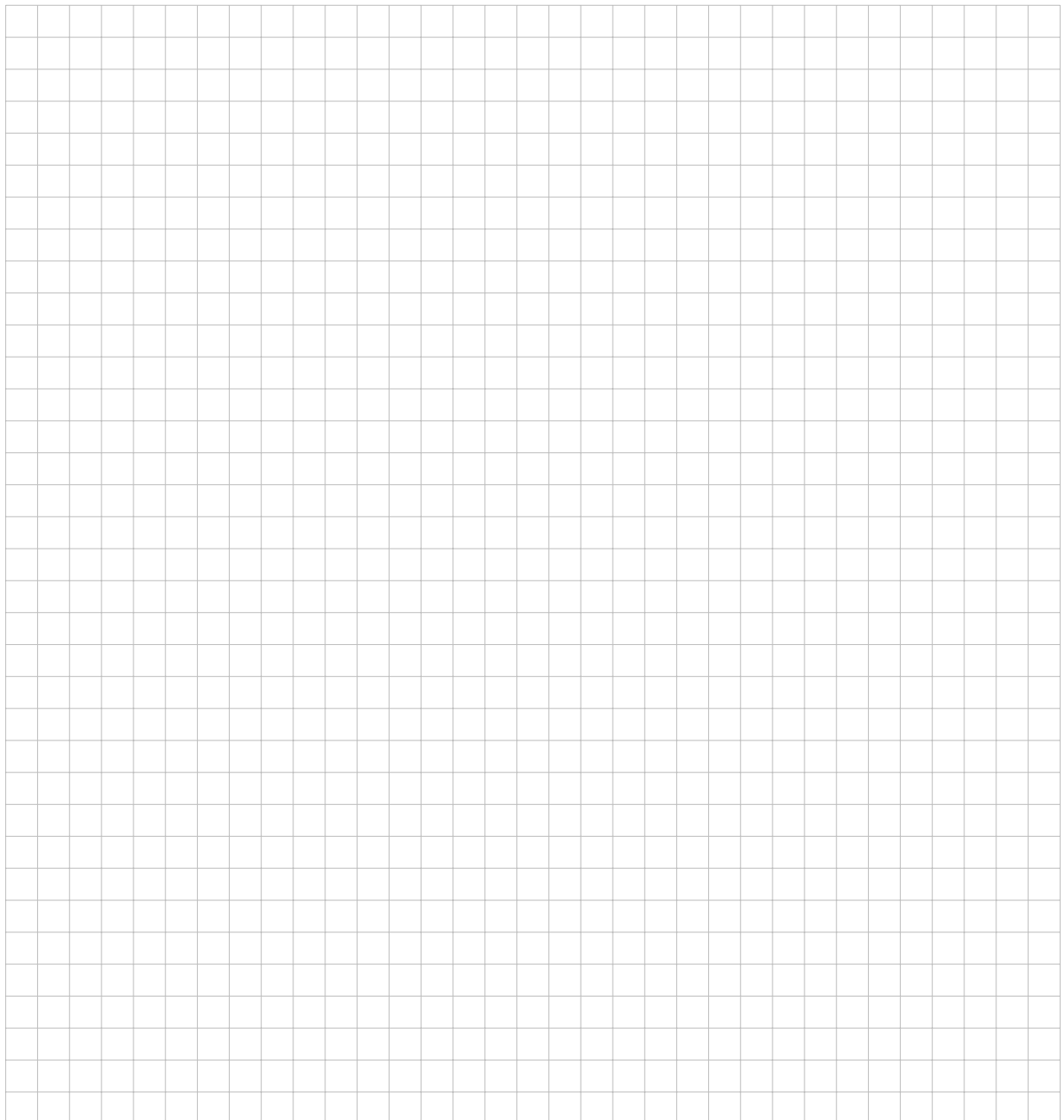
Question 7: *Cette question est notée sur 10 points.*

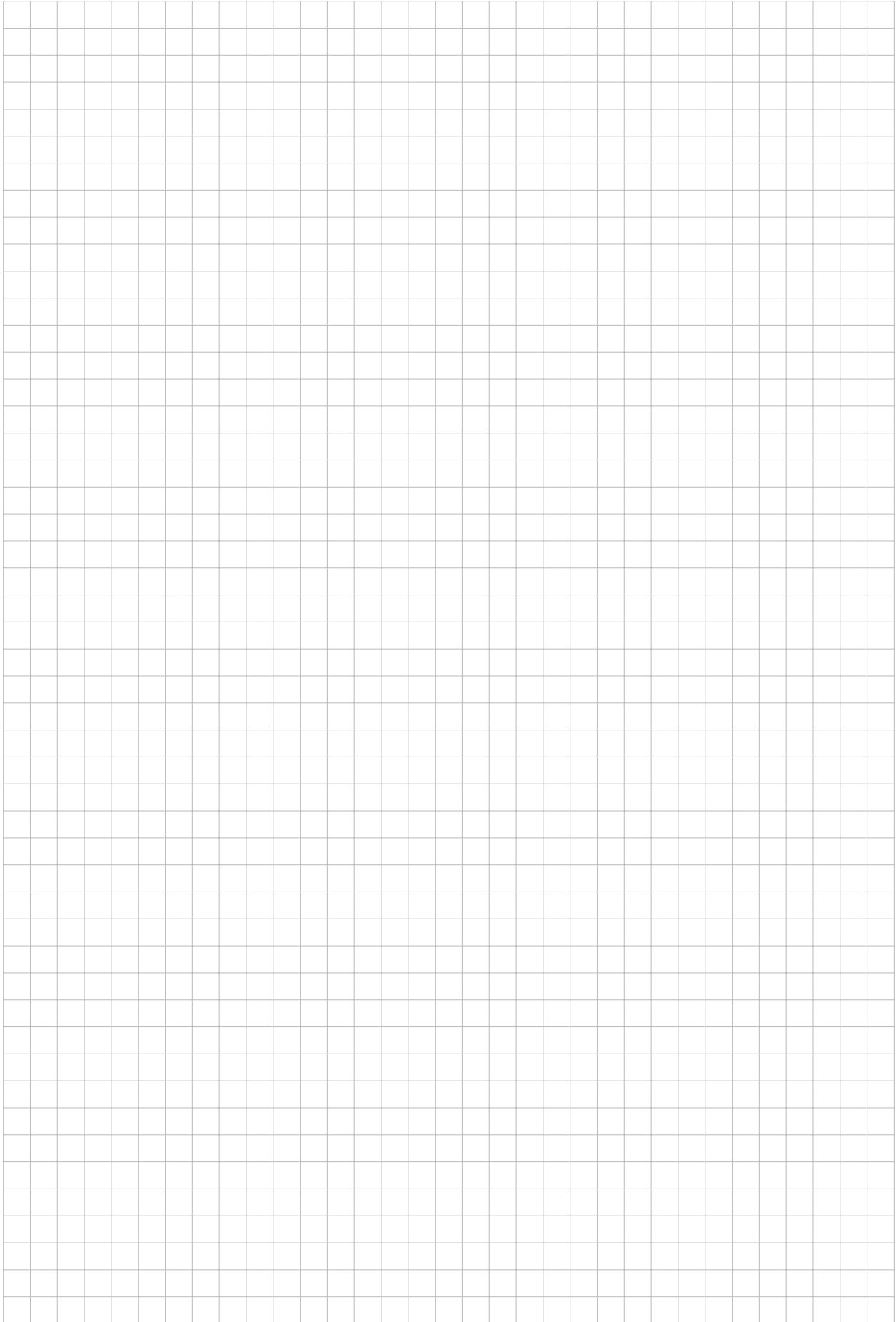
<input type="checkbox"/>	₀	<input type="checkbox"/>	₁	<input type="checkbox"/>	₂	<input type="checkbox"/>	₃	<input type="checkbox"/>	₄	<input type="checkbox"/>	₅	<input type="checkbox"/>	₆	<input type="checkbox"/>	₇	<input type="checkbox"/>	₈	<input type="checkbox"/>	₉	<input type="checkbox"/>	₁₀
--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	--------------	--------------------------	---------------

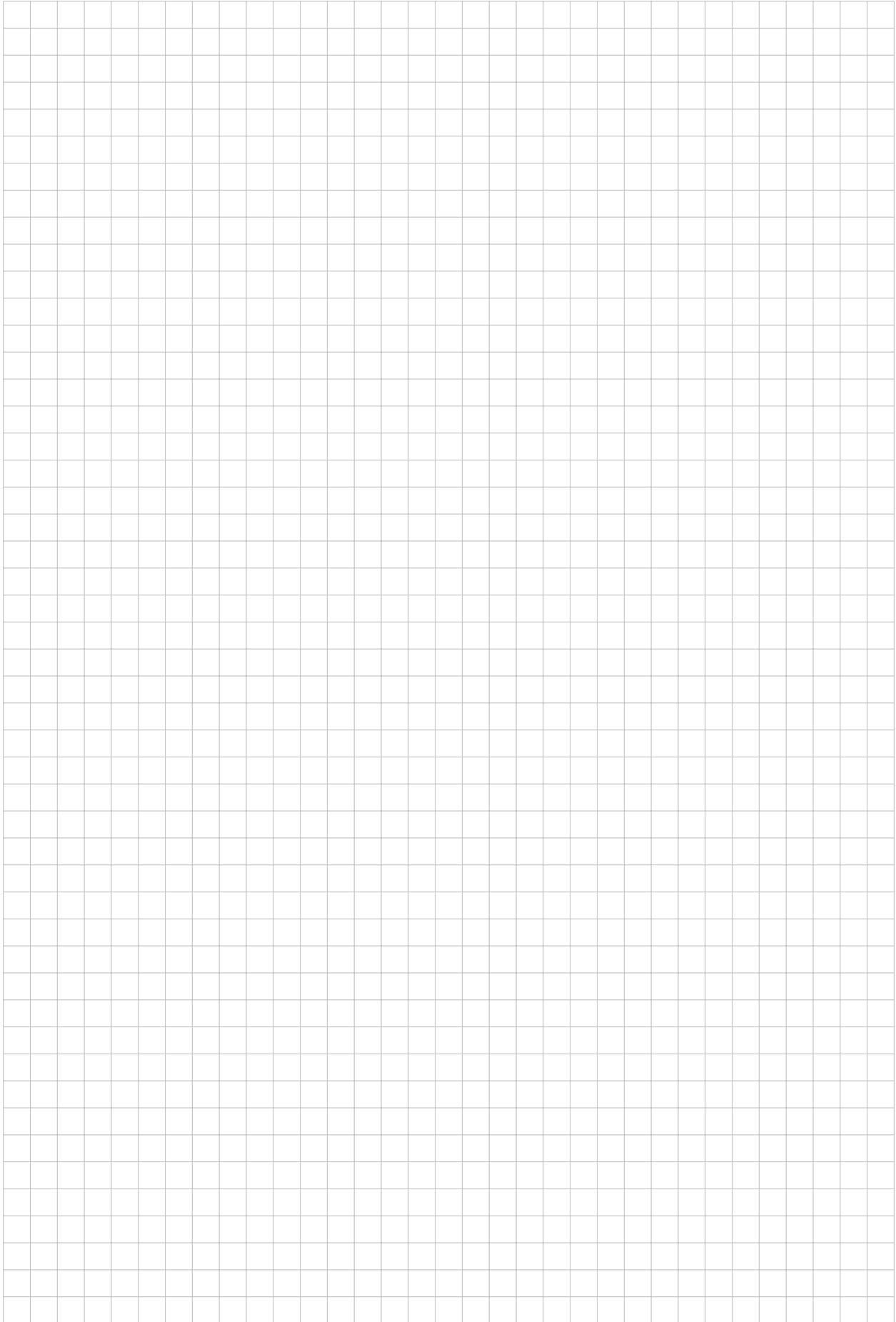
Soit $\alpha \in (0, 1)$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Prouver que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \alpha x_n + \beta, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge vers $\frac{\beta}{1 - \alpha}$.









Question 8: Cette question est notée sur 8 points.

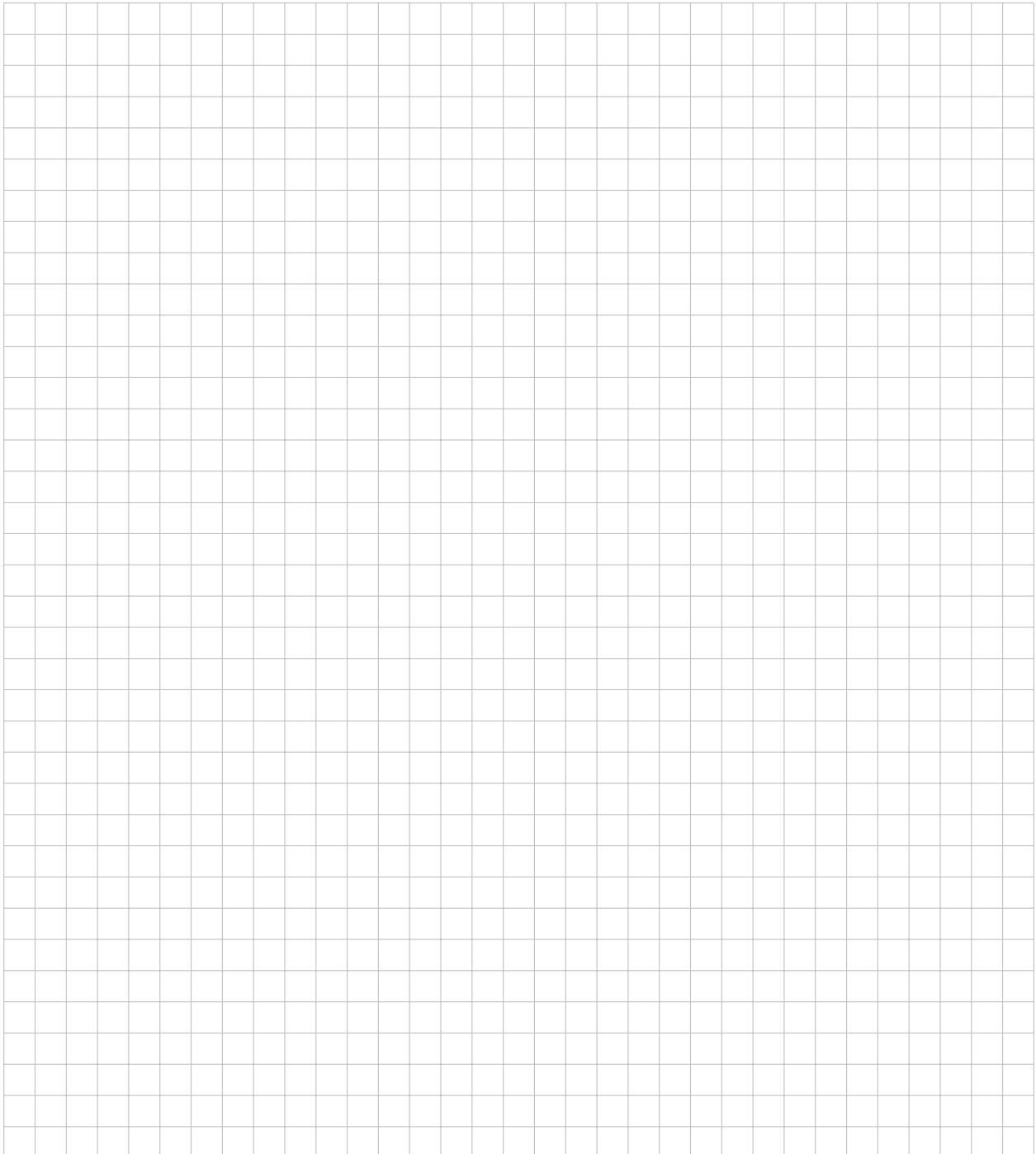
₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈

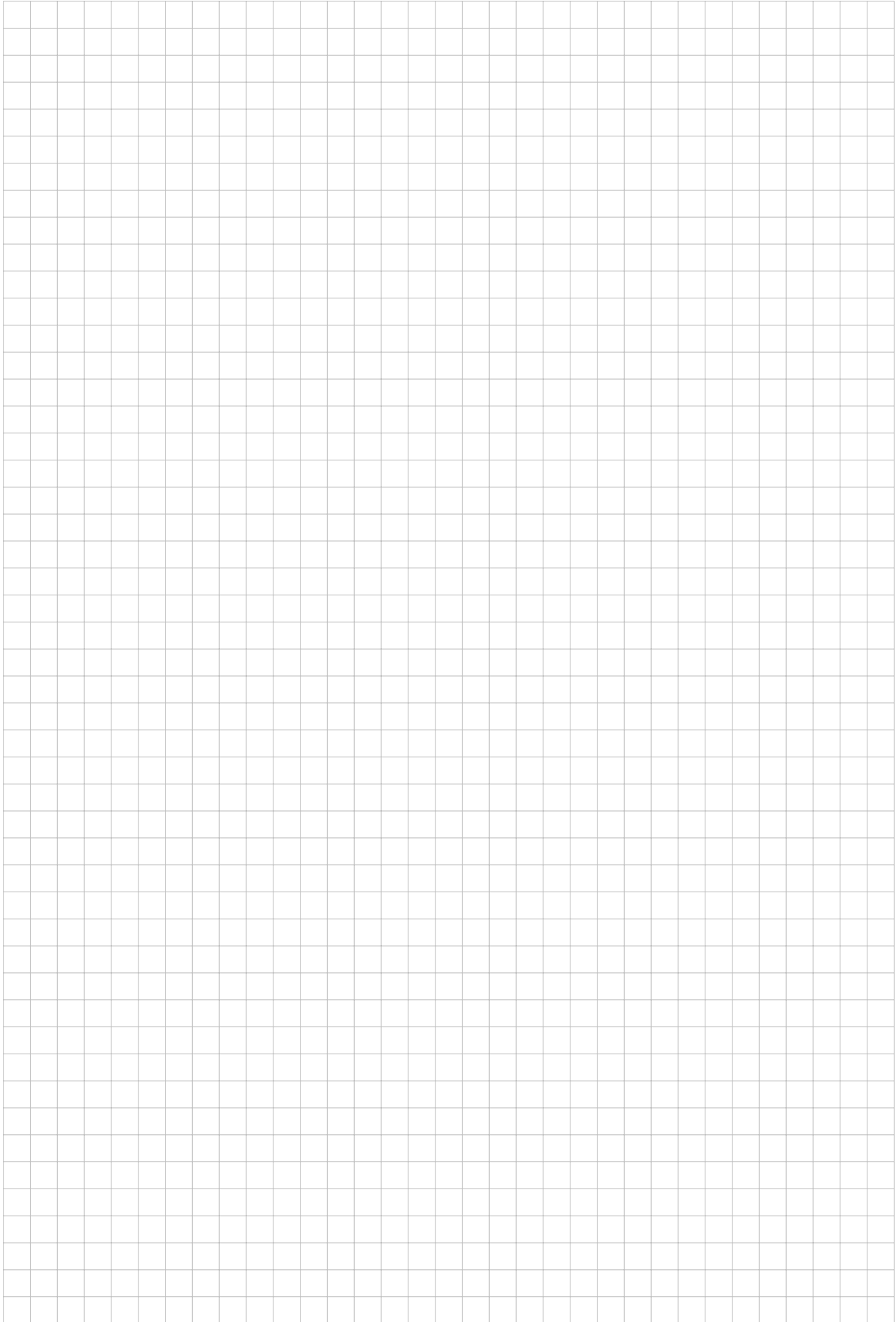
(a) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Définir ce que signifie " $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge".

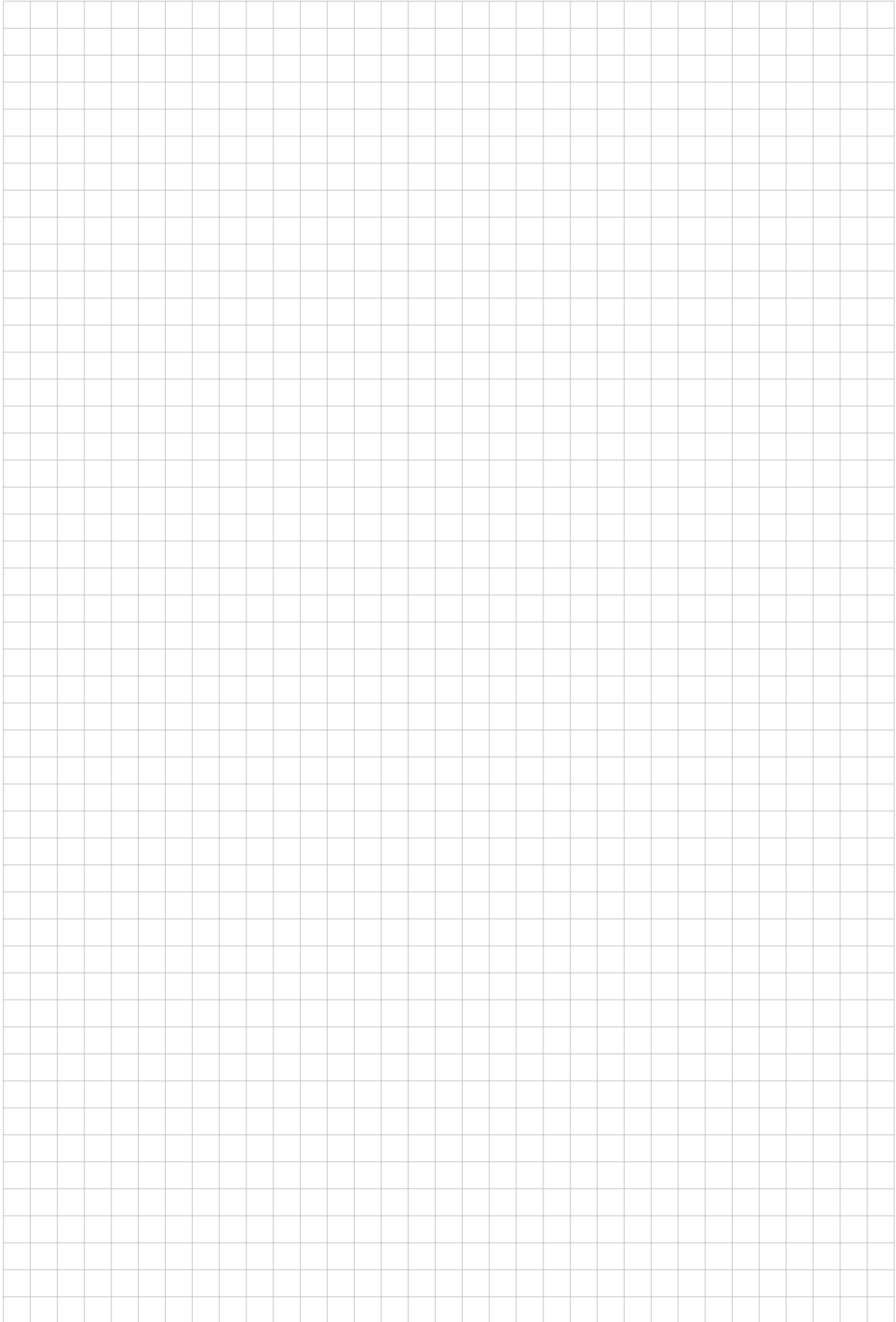
(b) Prouver le résultat suivant.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0, 1)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge.

Indication: il peut être utile de commencer par le cas $\ell = 0$.









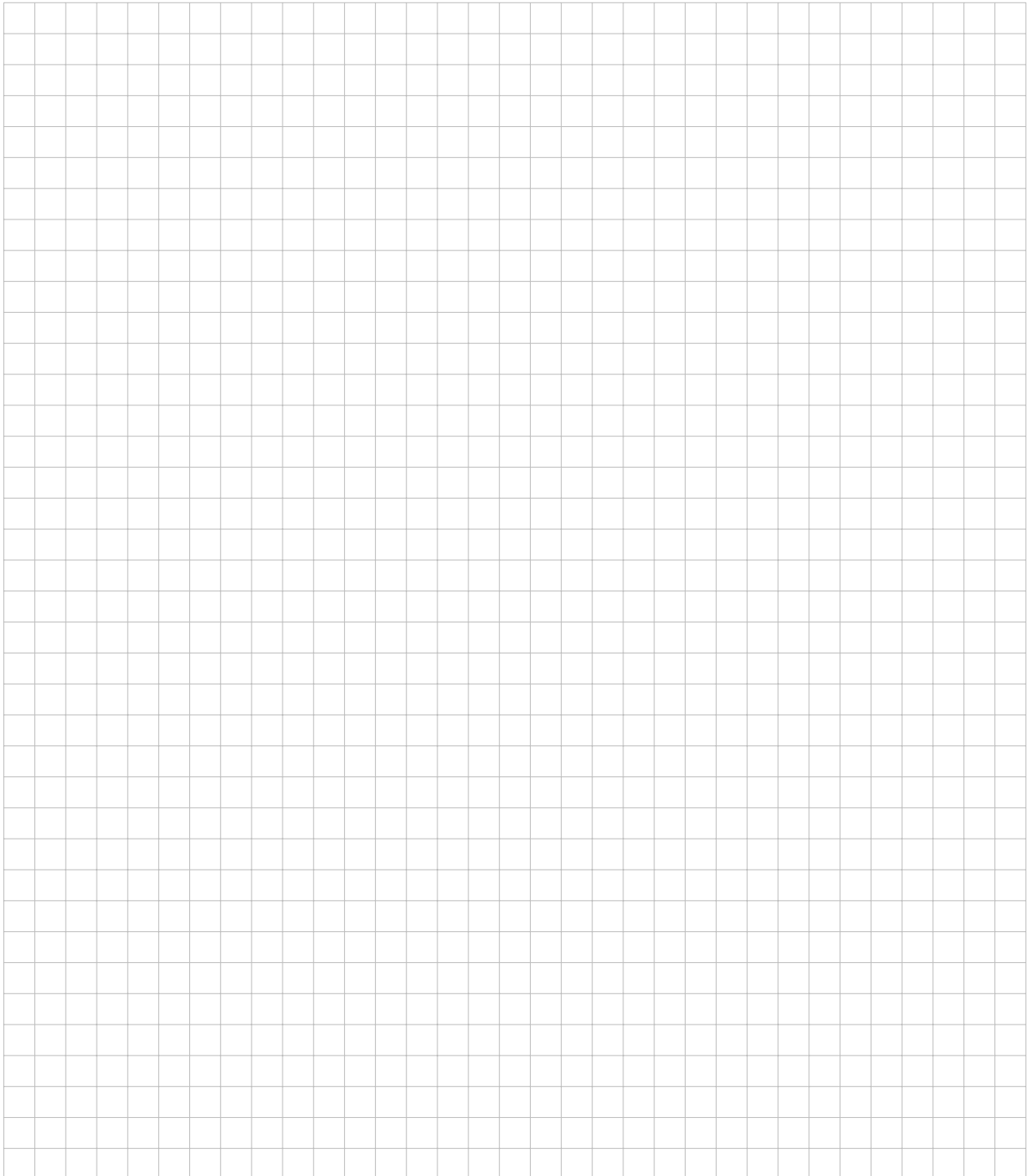
Question 9: *Cette question est notée sur 8 points.*

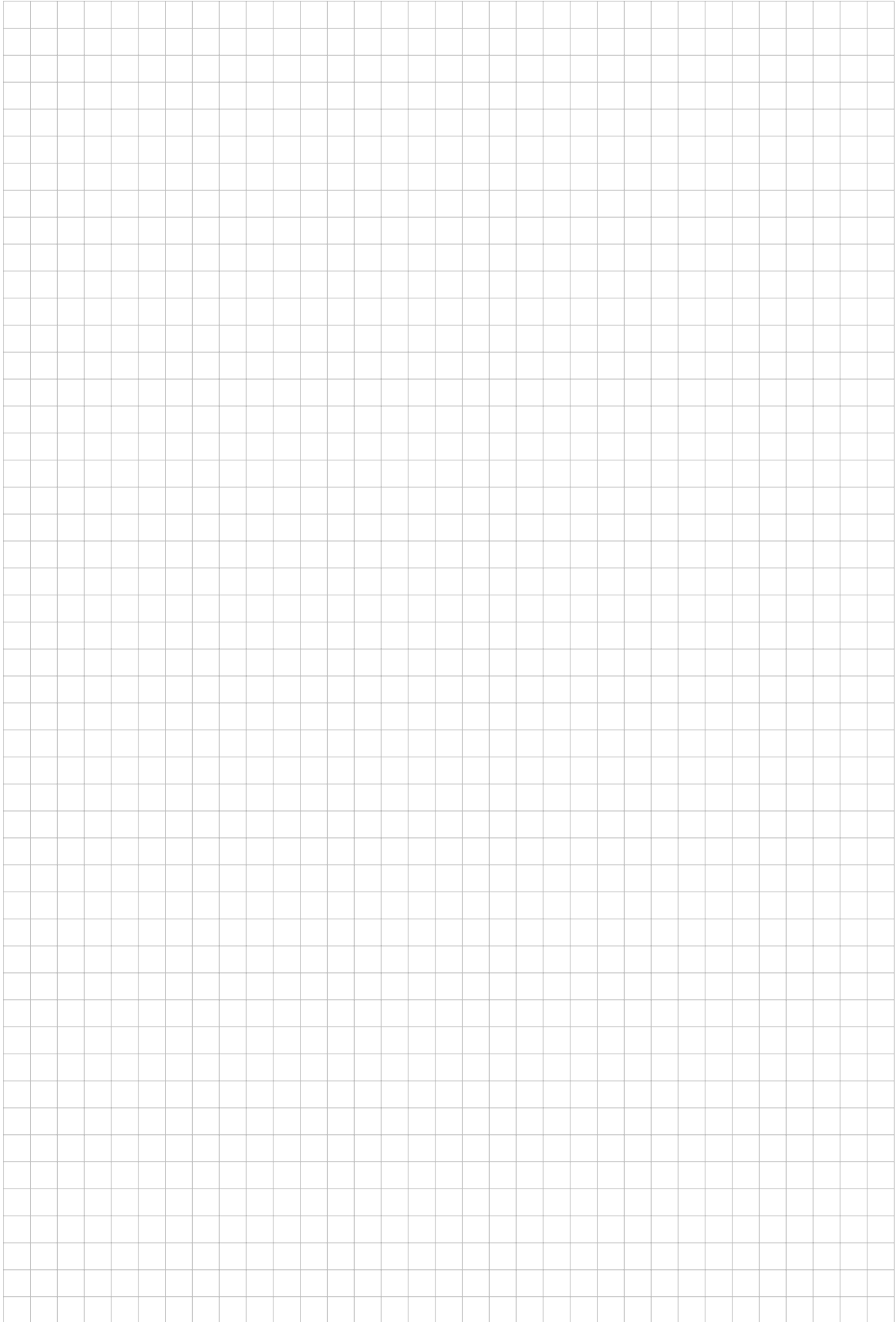
₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈

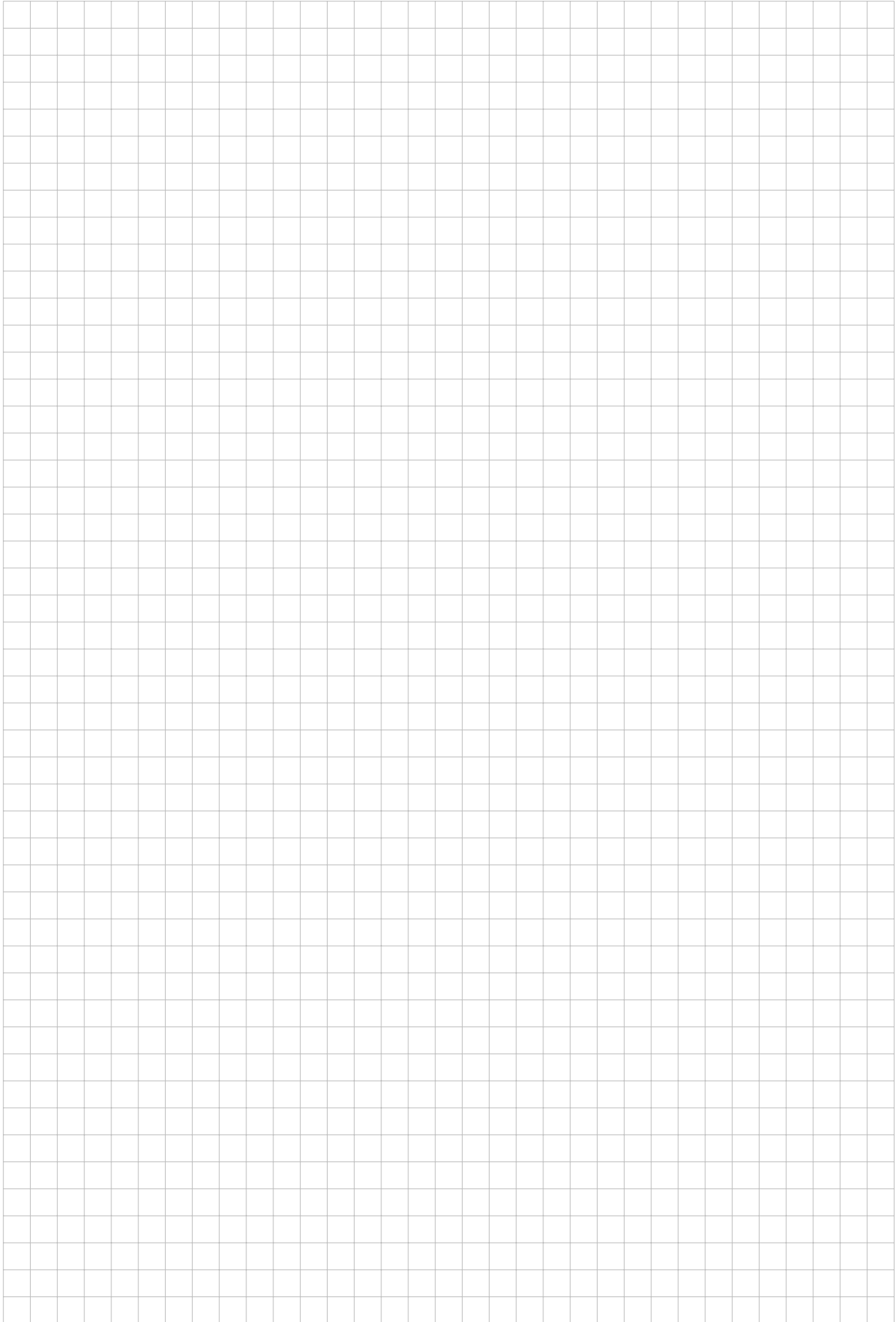
Déterminer (en fonction du paramètre $s \in \mathbb{R}$) si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes:

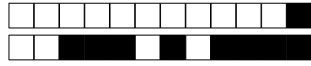
$$(i) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^s \ln(n)}; \quad (ii) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$$

Justifier rigoureusement vos réponses.









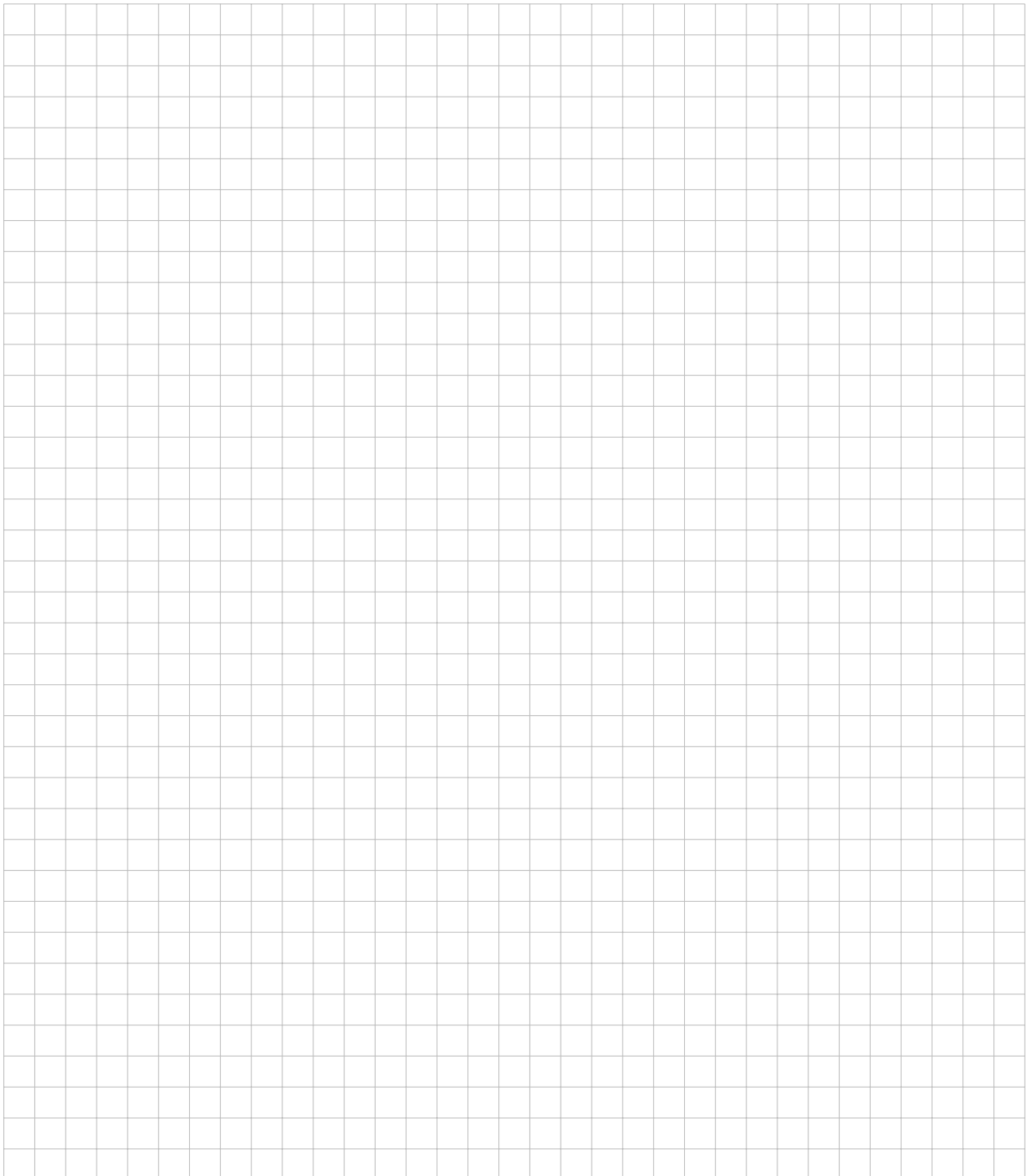
Question 10: Cette question est notée sur 8 points.

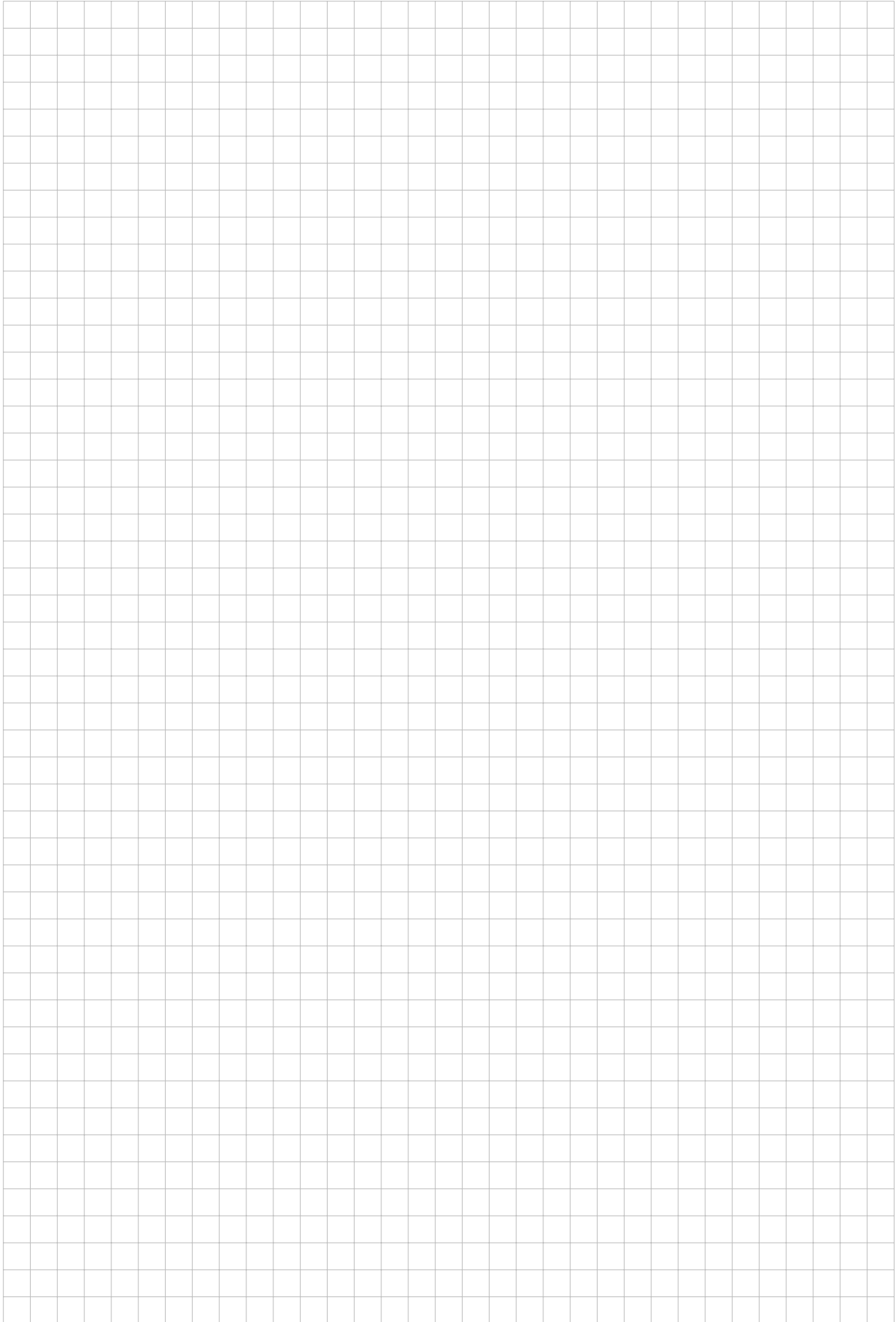
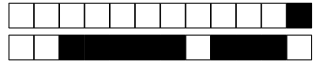
₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈

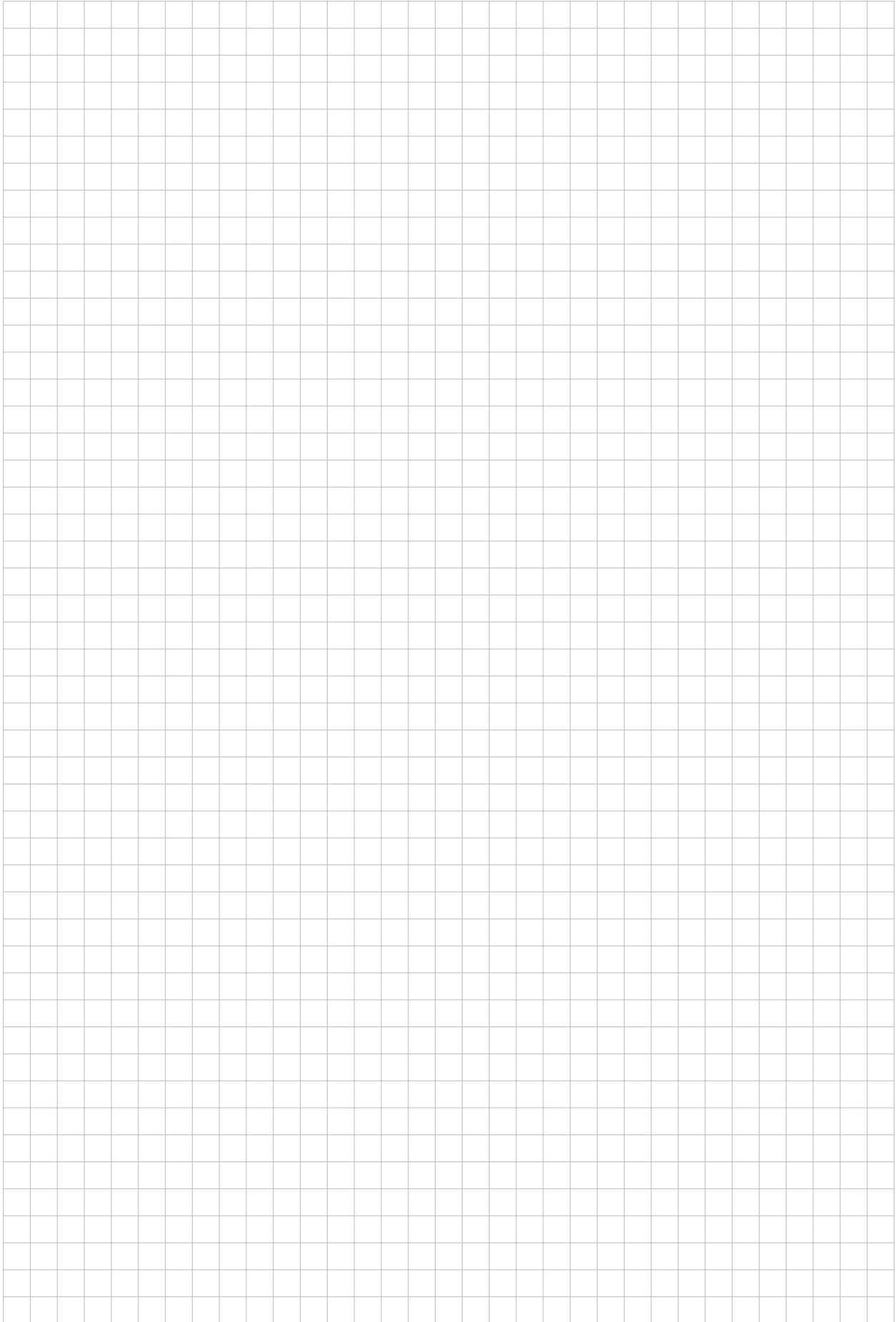
Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D(f)$.

- (a) Définir en utilisant les symboles ε et δ ce que signifie “ f est continue au point a ”.
- (b) Prouver que, si f est continue au point a alors f satisfait la propriété suivante:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f), x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a).$$









Question 11: Cette question est notée sur 14 points.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Soit $f(x) = \tanh(\cotan(x))$, où $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

(a) Déterminer:

- (i) le domaine maximal $D(f)$ de la fonction f ;
- (ii) l'ensemble des points de discontinuité de f ;
- (iii) la nature des points de discontinuité de f .

(b) Déterminer le domaine maximal $D(f')$ de la fonction dérivée f' et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D(f')$.

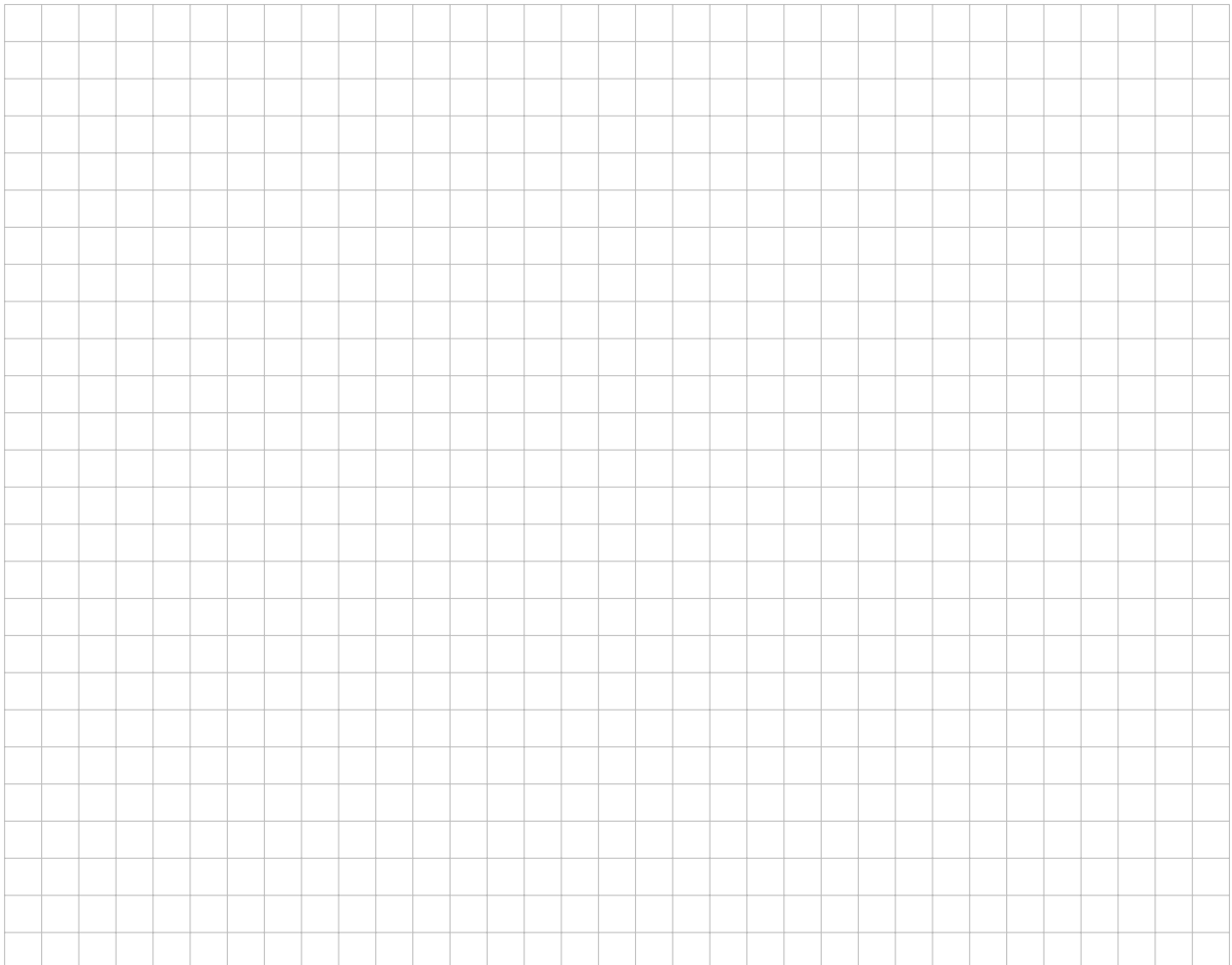
(c) Prouver $\cotan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$, c'est-à-dire

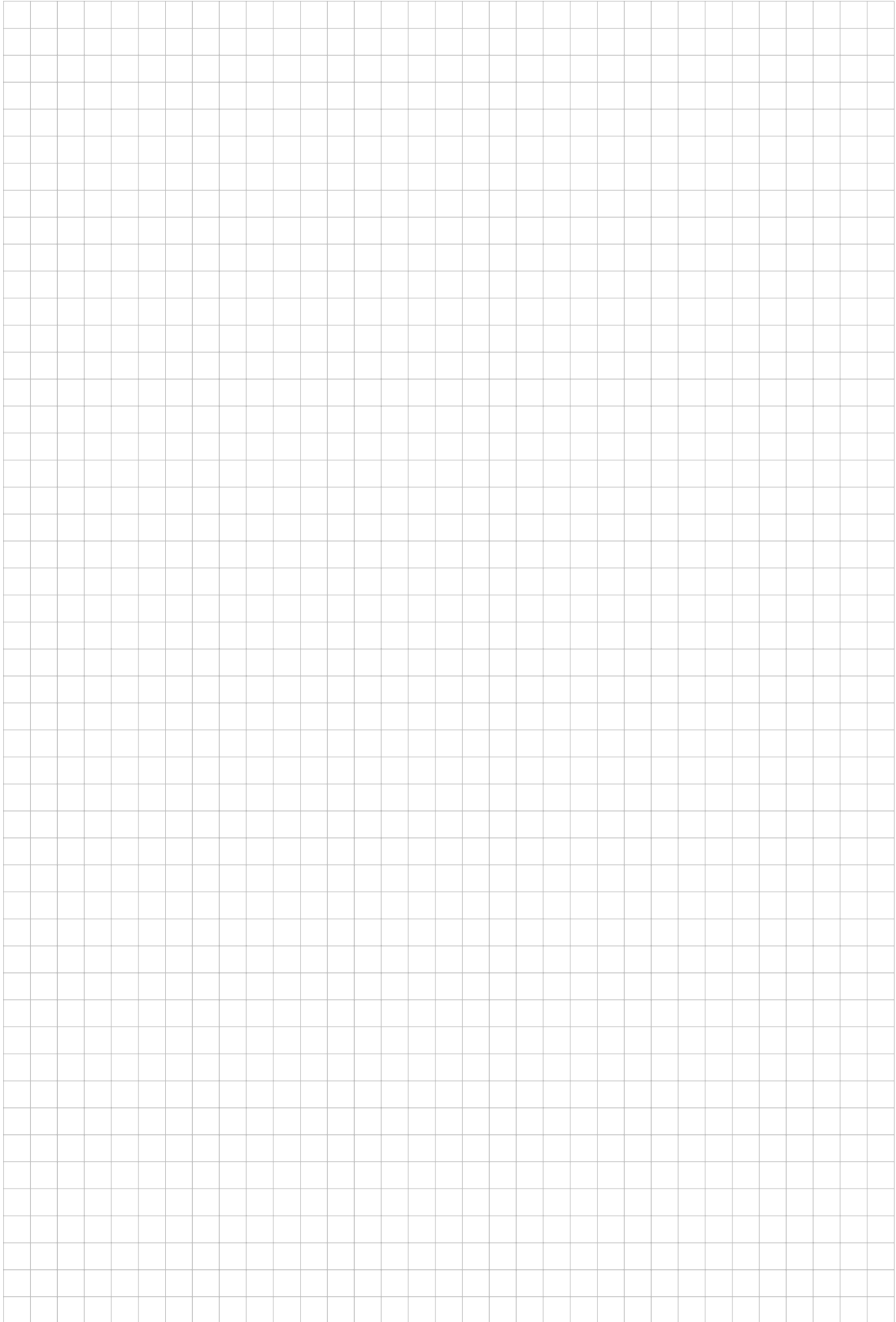
$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotan x = 1.$$

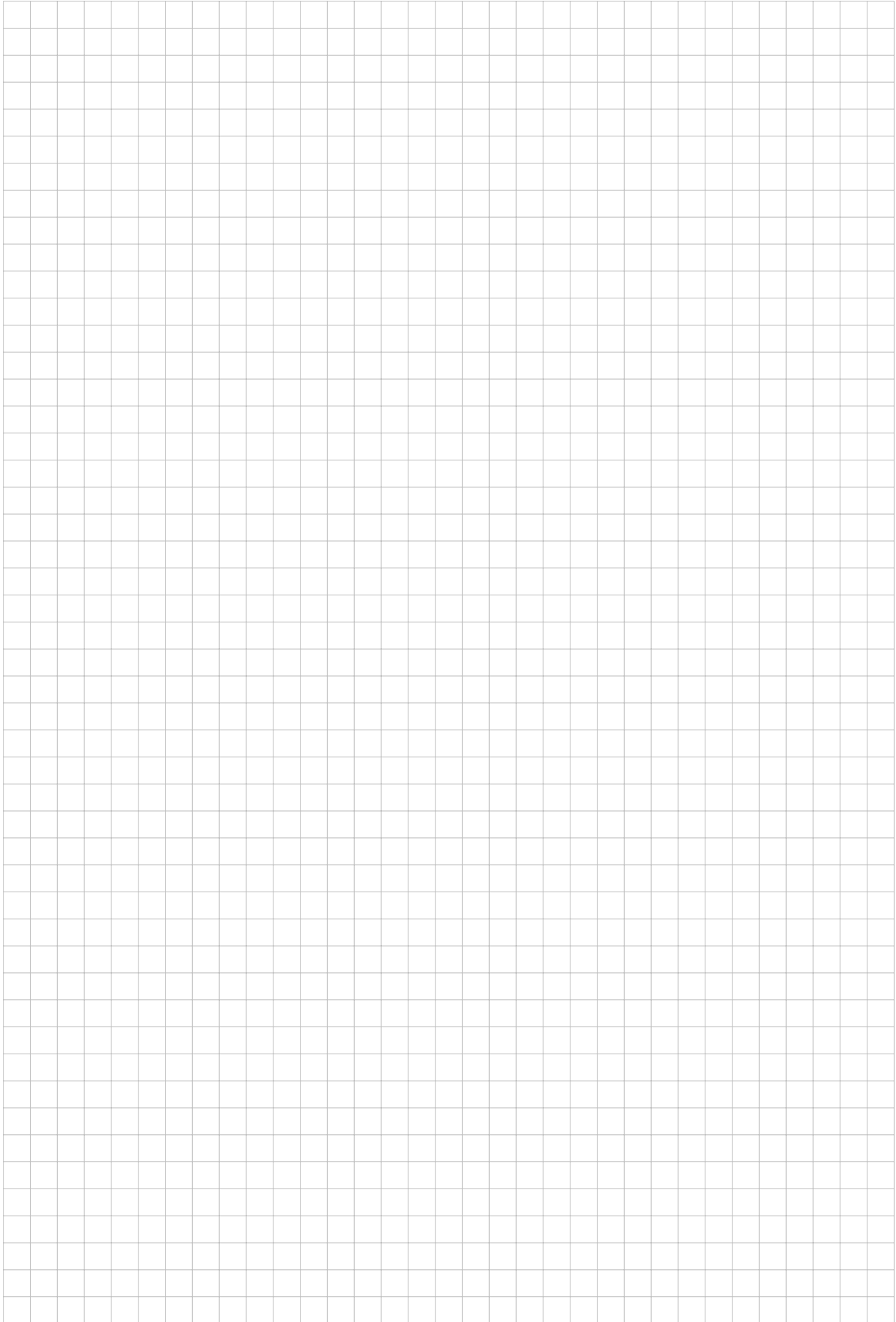
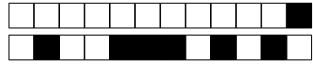
(d) À l'aide du point (c), prouver que f' peut être prolongée par continuité sur \mathbb{R} . On notera g la fonction ainsi obtenue.

(e) Est-ce que f est une primitive de g sur \mathbb{R} ? Justifiez votre réponse.

Indication: il peut être utile d'esquisser la représentation graphique de f .









Question 12: Cette question est notée sur 10 points.

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	10
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	----

(a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définir les assertions suivantes:

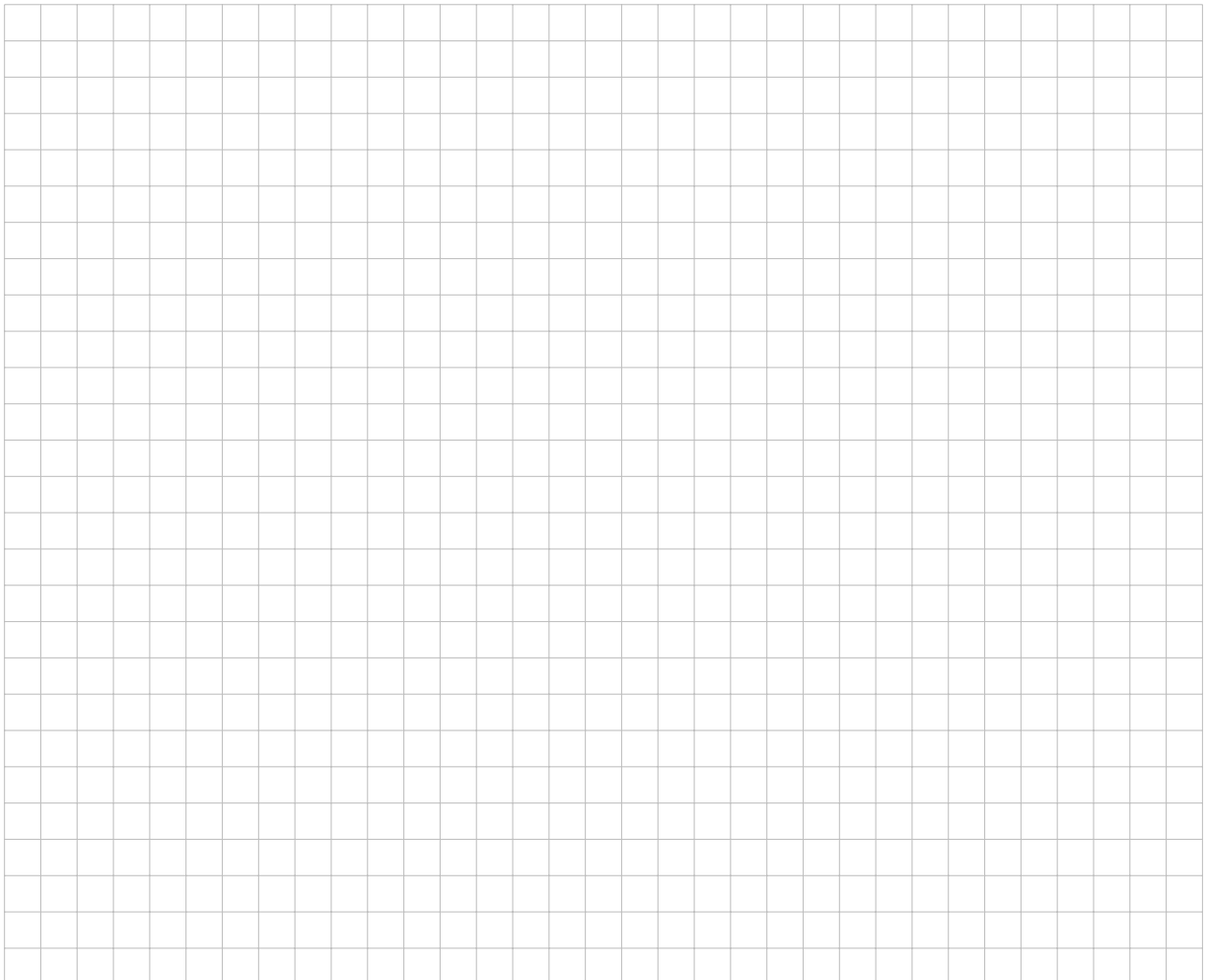
- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$;
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

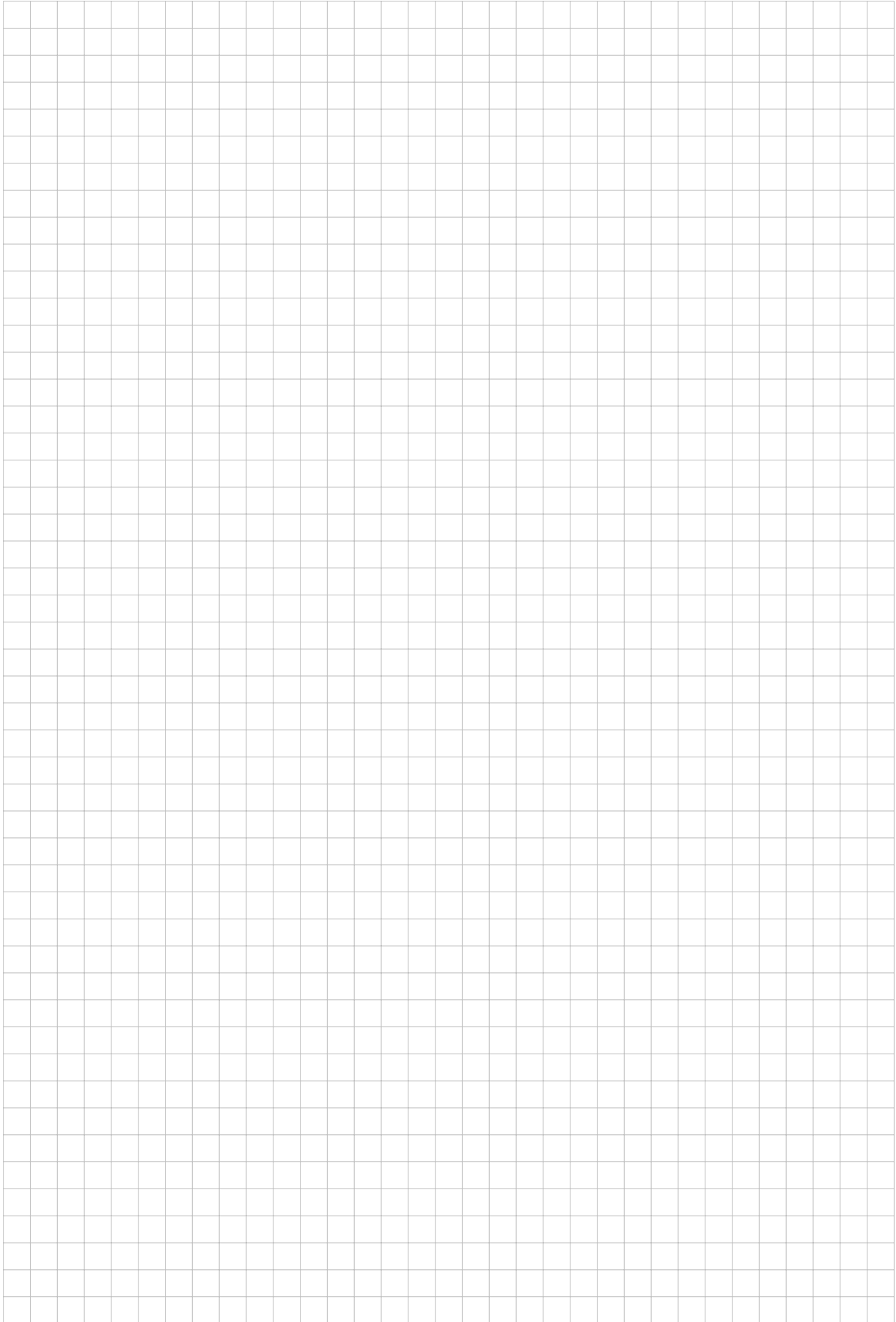
(b) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur \mathbb{R} par

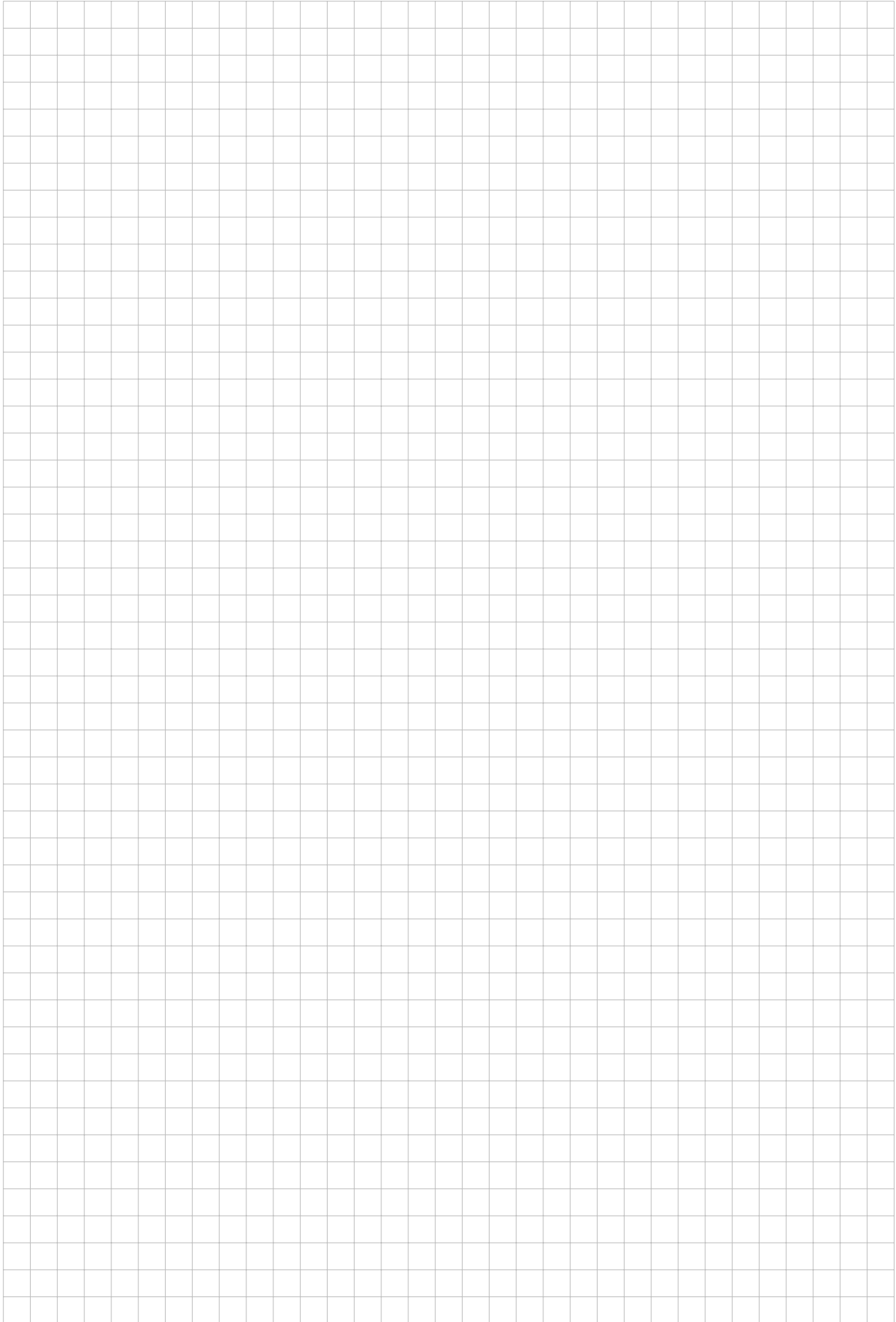
$$f_n(x) = \cos^n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\cos^n(t) := (\cos(t))^n, t \in \mathbb{R}$.

- (i) Prouver que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge ponctuellement vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.
Indication: utiliser un développement limité.
- (ii) Prouver que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur \mathbb{R} .









Question 13: Cette question est notée sur 6 points.

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆

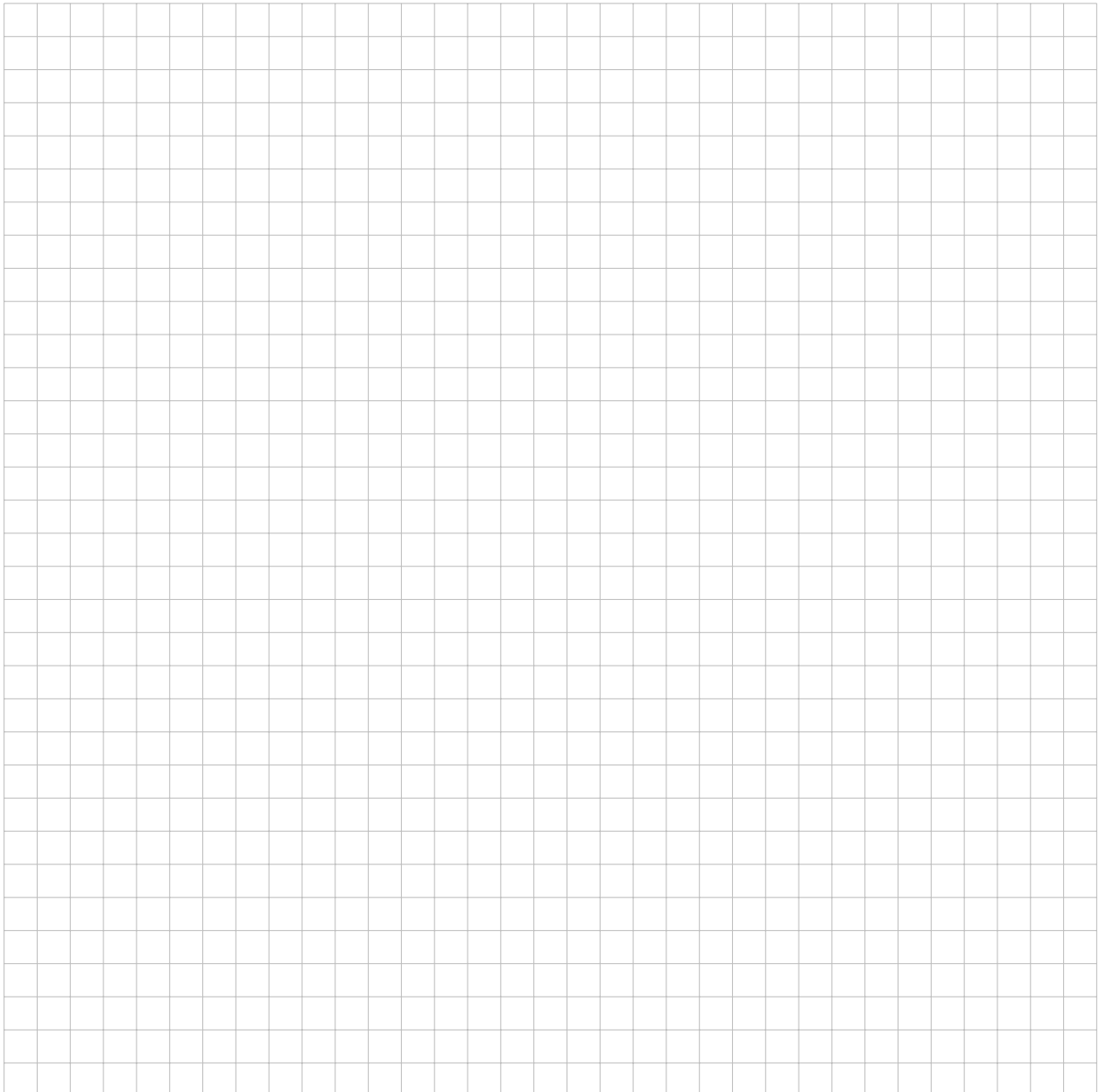
(a) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière.

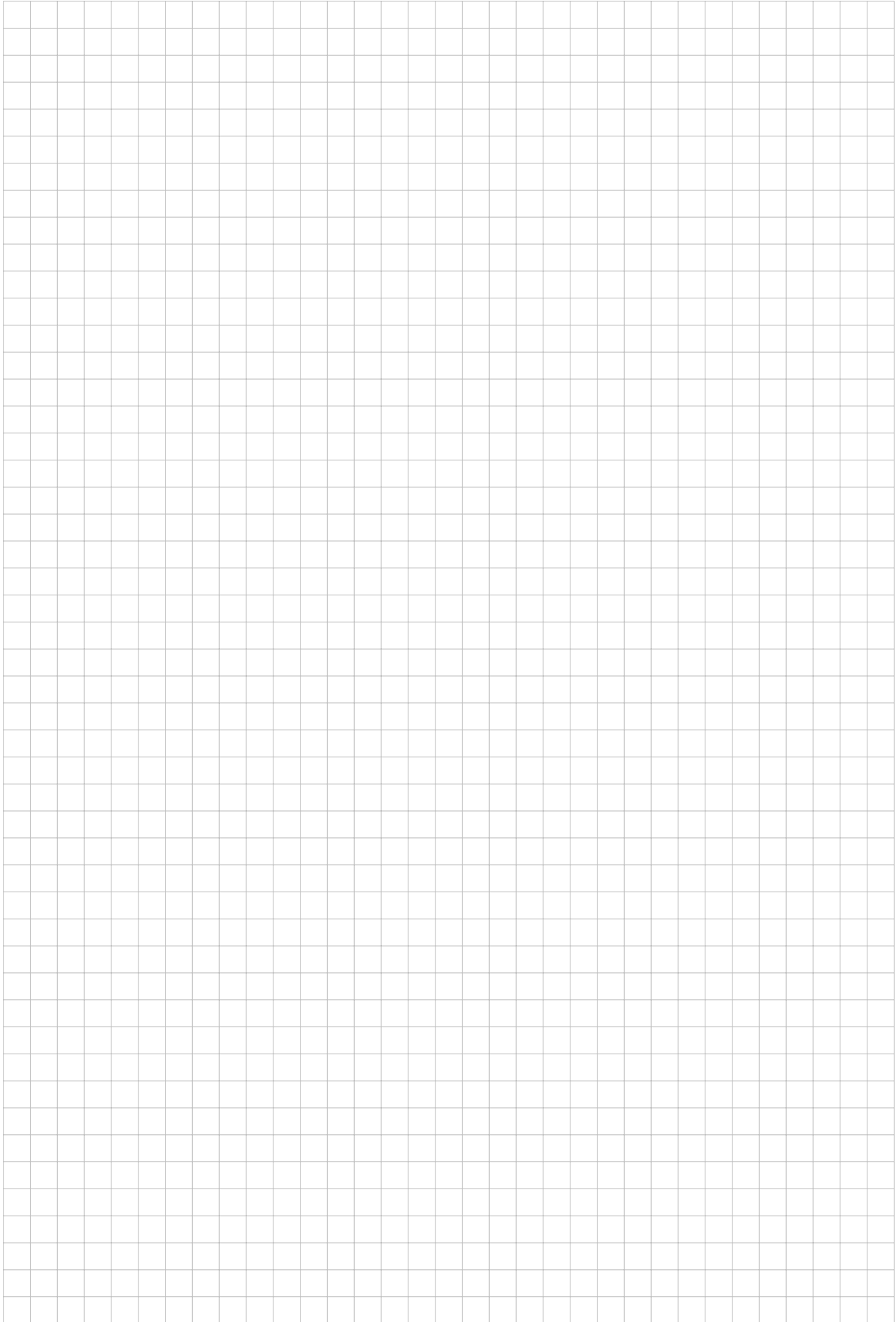
Donner le domaine de définition de f . Définir le rayon de convergence associé.

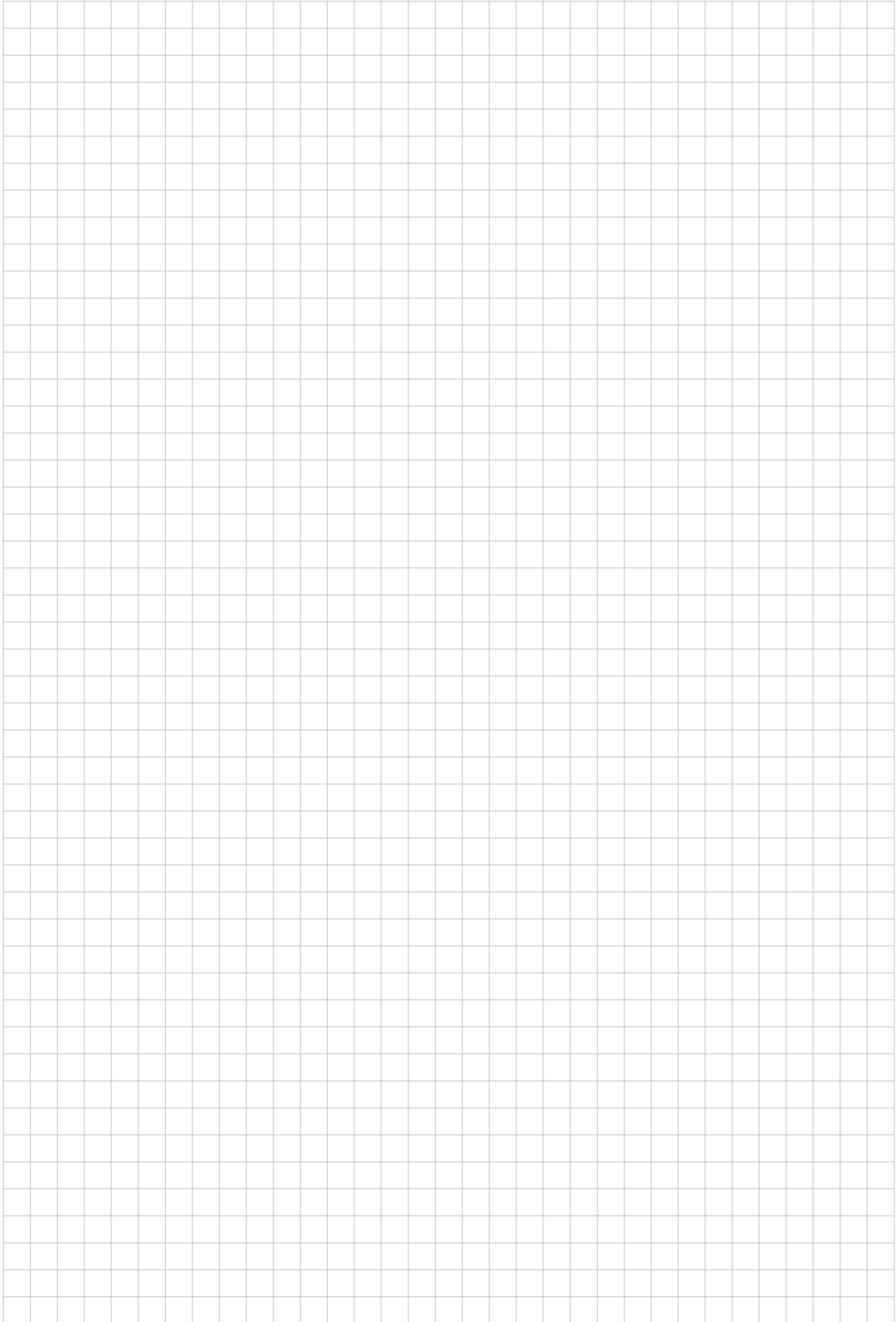
(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une série entière par la formule

$$S_{r,p}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^{pn}.$$

Déterminer le rayon de convergence de $S_{r,p}$ en fonction des paramètres p et r .







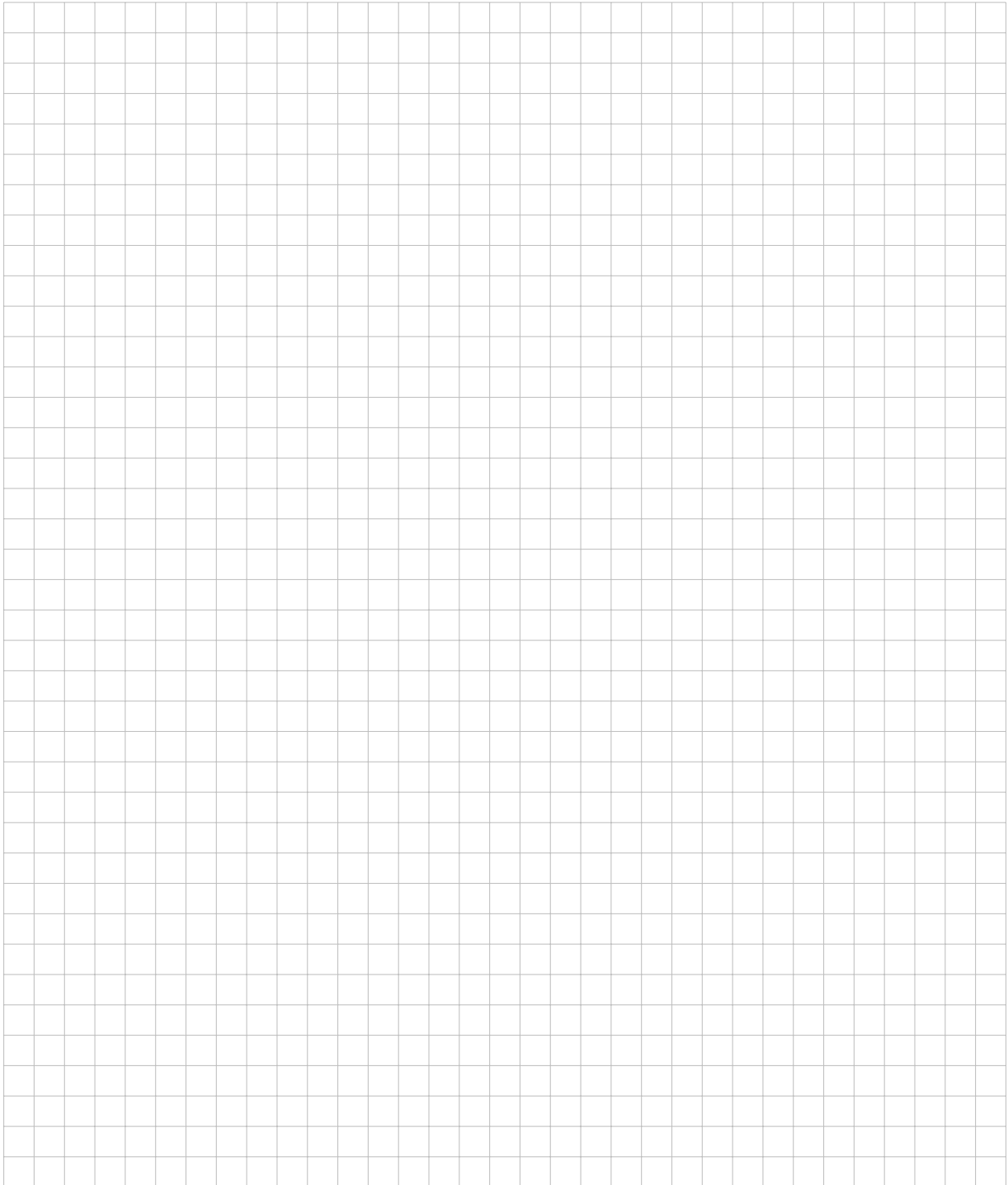


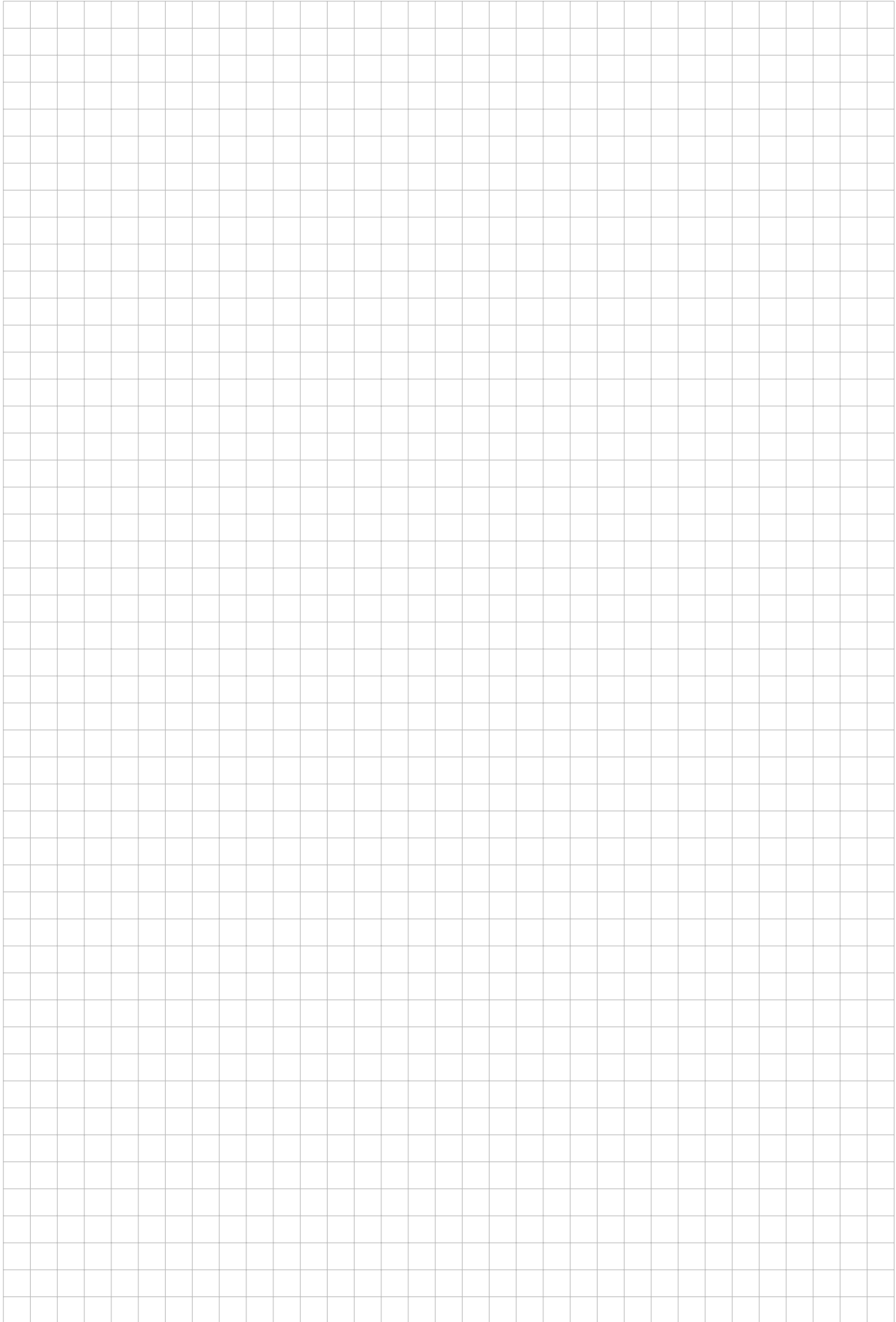
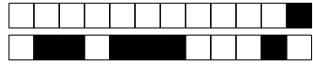
Question 14: *Cette question est notée sur 8 points.*

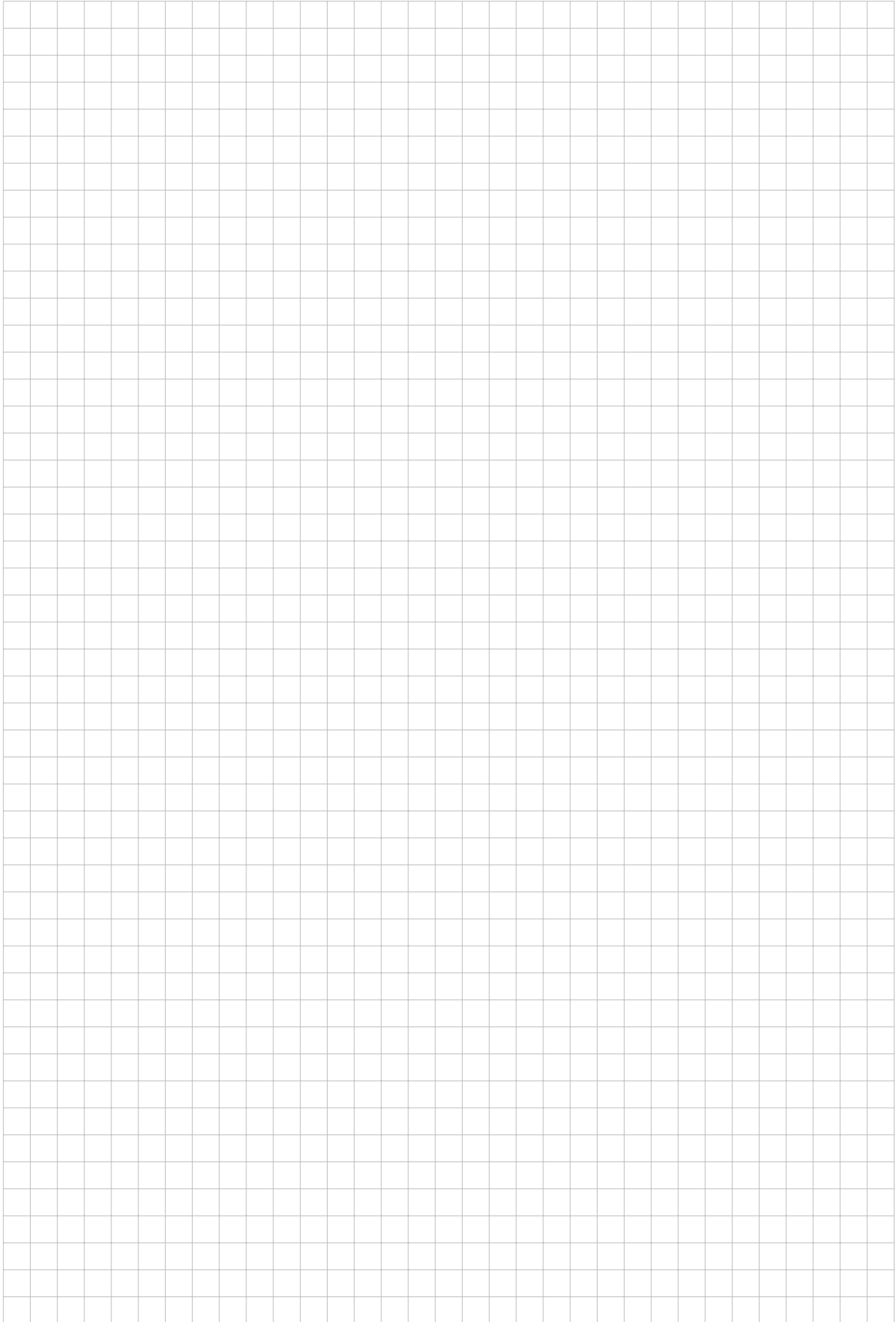
₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈

Calculer l'intégrale suivante en utilisant la décomposition en éléments simples:

$$\int_2^4 \frac{2x^3 + x^2 + 8x - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 4)} dx.$$









Question 15: Cette question est notée sur 8 points.

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈

(a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Donner la définition de l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x) dx.$$

(b) Soit $f : [1, 3] \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

(i) Montrer que $\int_1^2 f(x) dx$ est convergente.

(ii) Montrer que $\int_2^3 f(x) dx$ est divergente.

Indication: changement de variable.

