

CORRIGÉ 9

1. (a) $D(f) = \mathbb{R}$, $D(f') = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (b) $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2|x|$
 (c) $D(f) = \mathbb{R}_+$, $D(f') = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{7}{8\sqrt{x}}$ (d) $D(f) = \mathbb{R}_+$, $D(f') = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x^3}}}$

2. f est continûment dérivable sur \mathbb{R}^* comme composée de fonctions continûment dérivables. En $x = 0$, on a

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin(1/x^\beta) = 0,$$

si $\alpha > 1$. Si $\alpha \leq 1$, la limite ci-dessus n'existe pas et f n'est pas dérivable en $x = 0$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x^\beta) - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos(1/x^\beta).$$

La fonction dérivée f' est donc continue en $x = 0$ ssi $\alpha > \beta + 1$. Ainsi, $f \in C^1(\mathbb{R})$ ssi $\alpha > \beta + 1$.

3. On a déjà vu que f n'est continue qu'en $x = \pm 1$, donc f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Pour $x = -1$, soit $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ et $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ deux suites qui convergent vers -1 . On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(-1)}{x_n - (-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3 + 1}{x_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - x_n + 1) = 3$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(-1)}{y_n - (-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2 + y_n}{y_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -1,$$

donc f n'est pas dérivable en $x = -1$.

Pour $x = 1$, soit $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ et $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ deux suites qui convergent vers 1 . On a dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3 + 1 - 2}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n + 1) = 3$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(1)}{y_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2 + y_n - 2}{y_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n + 2 = 3,$$

donc f est dérivable en $x = 1$.

4. Premièrement, f est continue ssi $f(1^-) = f(1^+)$, i.e. $\alpha + \beta = 3$. f est clairement dérivable sur les deux demi-droites $(-\infty, 1)$ et $(1, \infty)$. D'autre part, f dérivable en $x = 1 \iff$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\alpha x - \alpha}{x - 1} \iff 1 = \alpha.$$

On trouve donc que f est dérivable en tout point ssi $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. On vérifie alors aisément que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

5. (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + 1 - e^x$. On a que $f'(x) = xe^x$, donc $f' < 0$ sur $(-\infty, 0)$, $f'(0) = 0$ et $f' > 0$ sur $(0, \infty)$. Puisque f est continue, $f(0) = 0$ est donc son minimum global, d'où la première inégalité. D'autre part, avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - x - 1$, on a $g'(x) = e^x - 1$, $g' < 0$ sur $(-\infty, 0)$, $g'(0) = 0$ et $g' > 0$ sur $(0, \infty)$. Donc $g(0) = 0$ est le minimum global de g , ce qui donne la deuxième inégalité.

(b) se démontre par des arguments similaires en utilisant les fonctions $f, g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = \ln(1+x) - x/(x+1)$.

(c) Soit $f : [0, 4\pi/3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x \cos x$. On a alors que $f'(x) = x \sin x$ est > 0 pour $x \in (0, \pi)$ et < 0 pour $x \in (\pi, 4\pi/3)$. f étant continue, elle est donc strictement croissante sur $(0, \pi)$ et strictement décroissante sur $(\pi, 4\pi/3)$. Par conséquent, comme $f(0) = 0$ et $f(4\pi/3) = 2\pi/3 - \sqrt{3}/2 > 0$, on a que $f(x) > 0$ pour tout $x \in (0, 4\pi/3)$, d'où le résultat.

(d) Puisque $\tan : (0, 1) \subset (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, l'inégalité est équivalente à

$$x < \arctan\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \forall x \in (0, 1).$$

Utilisant la formule pour la dérivée de la fonction inverse, on trouve que la fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ a pour dérivée

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Posant $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1-x}\right) - x$, nous obtenons alors $f'(x) = \frac{2x(1-x)}{2x^2 - 2x + 1} > 0$ pour tout $x \in (0, 1)$. Puisque f est continue, on a donc $f(x) > f(0) = 0$, pour tout $x \in (0, 1)$, ce qui prouve l'inégalité.

(e) Posant $f(x) = \sin x - x + x^3/6$, on a que $f'(x) = \cos x + x^2/2 - 1$, $f''(x) = -\sin x + x$ et $f'''(x) = 1 - \cos x$. Comme $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a alors les implications successives

$$f'''(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f''(x) \geq f''(0) = 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0,$$

ce qui prouve la première inégalité. La seconde se démontre de la même manière en utilisant la fonction $g(x) = \sin x - x + x^3/6 - x^5/120$ et en dérivant cinq fois.

6. (a) En appliquant deux fois la règle de Bernoulli–l'Hospital (BH), on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$.

(b) En utilisant une fois BH et la limite connue $(1 - \cos x)/x^2 \rightarrow 1/2$ quand $x \rightarrow 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1/\cos^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

(c) En utilisant une fois BH, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1/\sqrt{1-x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}(1 + \sqrt{1-x^2})} = -\frac{1}{6}.$$

(e) On constate que $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$, où $\frac{1}{x} \ln(1+x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$ (par BH). Ainsi, par la continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.

(g) En 0^+ pas de forme indéterminée, la limite est 0. En 0^- , le changement de variable $t = e^{-1/x}$ et BH donnent

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{1/x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t}{\ln t} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/t} = -\infty.$$

(h) En appliquant BH et utilisant (b), on a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{2} \cdot \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Par la continuité de la fonction exponentielle, on obtient donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/6}$.

7. (a) Si $\alpha \leq 0$, pas de forme indéterminée, la limite est $+\infty$. Pour $\alpha > 0$, on a une indétermination du type “ ∞/∞ ”, qu'on lève par BH :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

(b) est similaire et on trouve $-\infty$ pour $\alpha \leq 0$ et 0 pour $\alpha > 0$.

(c) découle de (b) en remarquant que $x^{x^\alpha} = \exp x^\alpha \ln x$, donc $x^{x^\alpha} \rightarrow 0$ si $\alpha \leq 0$, $x^{x^\alpha} \rightarrow 1$ si $\alpha > 0$.

(f) Par BH, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a)a^x - e^x}{1} = \ln(a) - 1$.

8. Sous les hypothèses données, on peut simplement appliquer BH : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

9. Supposons s.p.d.g. que $f(a) < f(b)$ et soit $y \in (f(a), f(b))$. Posons alors $\varphi(x) = F(x) - yx$. Pour $x \in (a, b)$, on a donc $f(x) = y$ ssi $\varphi'(x) = 0$. Par ailleurs, on remarque que

$$\varphi'(a) = f(a) - y < 0 < f(b) - y = \varphi'(b).$$

Mais on ne peut pas appliquer le TVI à φ' car cette fonction n'est pas nécessairement continue. En revanche, φ est dérivable (et donc continue) sur $[a, b]$, strictement décroissante dans un voisinage à droite de a et strictement croissante dans un voisinage à gauche de b . Par le théorème du min-max, elle possède donc un point de minimum $x_0 \in (a, b)$. Comme φ est dérivable au point x_0 , on a $\varphi'(x_0) = 0$. \square