

CORRIGÉ 7

1. On remarque tout d'abord que $f(x) + 1/f(x) \geq 2$ pour tout $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Par hypothèse, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 \leq f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \varepsilon, \quad \text{si } |x| < \delta,$$

ce qui équivaut à

$$0 \leq (f(x) - 1) + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) < \varepsilon, \quad \text{ou encore } 0 \leq (f(x) - 1) \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \varepsilon, \quad \text{si } |x| < \delta.$$

En élevant au carré, on obtient

$$0 \leq (f(x) - 1)^2 + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right)^2 - 2(f(x) - 1) \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \varepsilon^2$$

d'où $(f(x) - 1)^2 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$ si $|x| < \delta$. \square

2. Il suffit de remarquer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

et de poser $\hat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $\hat{f}(0) = 1/2$.

3. (a) Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x(x+1)} = +\infty$, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$. On remarque aussi qu'elle a une asymptote verticale en $x = -1$, avec $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \mp \infty$ (mais ces limites sont immédiates, il n'y pas de forme indéterminée en $x = -1$).

(b) En utilisant les résultats $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$ vus au cours et ci-dessus, on a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{(1 - \cos x)(3 - \cos x)}}{|x| \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\frac{x^2}{2}(3 - \cos x)}}{|x|x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3 - \cos x}{2}} = 1.$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x = 0$ et son prolongement est la fonction $\hat{f} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ et $\hat{f}(0) = 1$.

4. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et posons $\varepsilon = 1/2$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , pour tout $\delta > 0$ il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que

$$|x - a| < \delta \quad \text{mais} \quad |f(x) - f(a)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon.$$

Donc f est discontinue en tout point $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Le même argument, utilisant cette fois la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} , montre que f est discontinue en tout point $a \in \mathbb{Q}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n) \subset \mathbb{Q}$, $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des suites qui convergent vers a . On a alors, par la continuité des fonctions puissance,

$$f(x_n) = x_n^3 + 1 \rightarrow a^3 + 1 \quad \text{et} \quad f(y_n) = y_n^2 + y_n \rightarrow a^2 + a.$$

On obtient donc une condition nécessaire pour que f soit continue en a : $a^3 + 1 = a^2 + a$. Cette équation s'écrit $(a + 1)(a - 1)^2 = 0$, d'où les solutions $a = \pm 1$. Donc f est discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Nous prouvons maintenant que f est continue en $a = \pm 1$. Pour $a = -1$, $f(a) = 0$ et on a $x^3 + 1 \rightarrow 0$ ($\mathbb{Q} \ni x \rightarrow -1$) et $x^2 + x \rightarrow 0$ ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni x \rightarrow -1$). En $a = 1$, $f(a) = 2$, et on bien $x^3 + 1 \rightarrow 2$ ($\mathbb{Q} \ni x \rightarrow 1$) et $x^2 + x \rightarrow 2$ ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni x \rightarrow 1$). En résumé, $a = \pm 1$ sont les seuls points de continuité de f .

6. Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $b > a$ tel que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $x \geq b$, d'où $|f(x)| \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $x \geq b$. Par ailleurs, par le théorème du min-max, il existe $M \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. On a ainsi que $|f(x)| \leq \max\{M, \ell + \varepsilon\}$ pour tout $x \in [a, \infty)$. \square

7. Prendre, par exemple, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{si } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$

8. Prendre, par exemple, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9. Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \implies ||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $|f|$ est aussi continue. Un contre-exemple à la réciproque est donné par la fonction

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

10. (a) La fonction $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1/x - 1$ est continue comme composée de fonctions continues. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. On peut donc trouver $a, b \in (0, \infty)$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, et le théorème de la valeur intermédiaire donne alors un $x \in (a, b)$ tel que $f(x) = 0$.

(b) La fonction $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 2$, est continue comme composée de fonctions continues, et on a $f(0) = -1 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$, donc il existe $x \in (0, 2)$ tel que $f(x) = 0$.

(c) La fonction $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x + \ln(x) + \sin(x)$, est continue comme composée de fonctions continues, et satisfait $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Donc il existe $x \in (0, \infty)$ tel que $f(x) = 0$.

11. La fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - x$, est continue comme composée de fonctions continues. Par ailleurs, $F(a) = f(a) - a \geq 0$ et $F(b) = f(b) - b \leq 0$, donc il existe $x \in [a, b]$ tel que $F(x) = 0$.

12. Supposons par l'absurde qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tels que $f(a) \neq f(b)$. Puisque f est continue, le théorème de la valeur intermédiaire assure que f prend toutes les valeurs réelles dans l'intervalle entre $f(a)$ et $f(b)$, ce qui contredit l'hypothèse que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe une suite $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $x_n \rightarrow x$. Alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$ et $g(x_n) \rightarrow g(x)$ par la continuité des fonctions f et g . Par passage à la limite, la relation $f(x_n) \geq g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique donc $f(x) \geq g(x)$, ce qui prouve (a). Le point (b) se déduit du point (a) en supposant que $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

14. On remarque tout d'abord que $f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas constante, il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors la relation précédente donne $f(0) = 1$. Par suite,

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x)f(-x) \implies f(-x) = f(x)^{-1} \text{ et } f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous montrons maintenant que f est continue sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(y_n) \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $y_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous avons alors, par la continuité de f au point x_0 ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x - x_0 + x_0 + y_n) = f(x - x_0) \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + y_n) \\ &= f(x - x_0)f(x_0) = f(x)f(x_0)^{-1}f(x_0) = f(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que f est continue au point x . Comme $x \in \mathbb{R}$ est quelconque, f est bien continue sur \mathbb{R} .

Une conséquence importante des points précédents est que $f > 0$ sur \mathbb{R} . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) < 0$. Comme $f(0) = 1$, le théorème de la valeur intermédiaire implique l'existence d'un x dans l'intervalle d'extrémités x_1 et 0, tel que $f(x) = 0$ ζ

On observe maintenant que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(1) \dots f(1)}_{n \text{ fois}} = f(1)^n.$$

Un argument similaire montre que $f(-n) = f(1)^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a donc $f(k) = f(1)^k$, pour tous $k \in \mathbb{Z}$. Maintenant, pour $r \in \mathbb{Q}$, écrivons $r = p/q$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$f(1)^p = f(p) = f(qr) = f(r)^q \implies f(r) = f(1)^r.$$

Posant $a = f(1) > 0$, on a ainsi que $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Puisque les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto a^x$ sont continues sur \mathbb{R} , il découle de l'exercice 13 (b) que $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. \square