

## CORRIGÉ 6

1. (a)  $\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n} \forall n \geq 2$  et  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} = \infty \implies \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} = \infty$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 7n + 13} = 1$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty \implies \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - 7n + 13} < \infty$ . (Notez que  $n^2 - 7n + 13 > 0 \forall n \geq 1$ .)

(c) Posons  $a_n = a^{\sum_{k=1}^n 1/k}$  et  $b_n = a^{\ln(n)}$ . Par l'exercice 5 (a) de la série 5, et la continuité de  $t \mapsto a^t$ , il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n)} = a^\ell > 0.$$

Donc  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  ont même nature. Comme

$$b_n = a^{\ln(n)} = n^{\ln(a)} = \frac{1}{n^{-\ln(a)}} = \frac{1}{n^{\ln(1/a)}},$$

on a que  $\sum b_n$  converge ssi  $\ln(1/a) > 1$ , i.e. ssi  $a < 1/e$ . En conclusion,  $\sum a^{\sum_{k=1}^n 1/k}$  converge ssi  $a < 1/e$ .

(d) Si  $\alpha \leq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + 1/n^\alpha) \neq 0$  et donc la série diverge.

Pour  $\alpha > 0$ , on remarque que, par la continuité de la fonction  $t \mapsto \ln(t)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha} = \ln(e) = 1,$$

ce qui montre que  $\sum \ln(1 + 1/n^\alpha)$  et  $\sum 1/n^\alpha$  ont même nature. Donc  $\sum \ln(1 + 1/n^\alpha)$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

2. (a) Posant  $x_n = a^n n! / n^n$ , on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} \right| = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = \frac{|a|}{e}.$$

Donc  $\sum x_n$  converge absolument si  $|a| < e$  et diverge si  $|a| > e$ . Si  $|a| = e$ , on a pour tout  $n \geq 2$  que

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{e}{(1 + 1/n)^n} > 1 \implies |x_{n+1}| > |x_n| > \dots > |x_1| = e.$$

Ainsi la suite  $(|x_n|)$  est strictement positive et croissante. Donc  $x_n \not\rightarrow 0$  et la série  $\sum x_n$  est divergente. En résumé,  $\sum a^n n! / n^n$  converge ssi  $|a| < e$ .

On montre que les séries (b) et (c) sont convergentes par le critère du quotient.

(c) Si  $p = 1$ , la série converge ssi  $|a| < 1$ . Supposons maintenant  $p \geq 2$ . Posant  $x_n = a^{n^p}$ , on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^{n^{p-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1, \\ \infty & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$

Si  $|a| = 1$ ,  $a = \pm 1$ , et  $x_n = (\pm 1)^{n^p} \not\rightarrow 0$ , donc la série diverge. En résumé,  $\sum a^{n^p}$  converge ssi  $|a| < 1$ .

On montre également par le critère de la racine que (f) converge ssi  $|a| < 1$ .

(d) Posant  $x_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$ , on a que

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{n^{\ln(n)/n}}{\ln(n)} = \frac{e^{(\ln(n))^2/n}}{\ln(n)}.$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(n))^2}{n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \right)^2 = 0$ , par la généralisation de l'exercice 3 (a), série 4, dont le résultat reste vrai pour tout  $p \in (0, \infty)$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 0$  et la série est convergente.

3. (a) Après condensation avec  $a_n = 2^n$ , on est ramené à l'étude de la série de terme général  $x_n = 2^n / [\ln(n \ln 2)]^{n \ln 2}$  et le critère de la racine montre que la série converge.

(b) Après condensation avec  $a_n = 2^n$ , on est ramené à l'étude de la série de terme général  $x_n = 2^n / (n \ln 2)^{a n \ln 2}$ . On a alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n \ln 2)^{\alpha \ln 2}} = \frac{2}{(\ln 2)^{\alpha \ln 2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^{\alpha \ln 2}} = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha < 0, \\ 2 & \text{si } \alpha = 0, \\ 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Donc la série converge ssi  $\alpha > 0$ .

(c) Après condensation avec  $a_n = 2^n$ , on est ramené à l'étude de la série de terme général  $x_n = 2^{n(1-\alpha)}/(n \ln 2)^\beta$ , et l'on obtient que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 2^{1-\alpha}$ . Ainsi, pour tout  $\beta \geq 0$ , la série converge si  $\alpha > 1$ , diverge si  $\alpha < 1$ .

Pour  $\alpha = 1$ , on a  $x_n = 1/(n \ln 2)^\beta$ , donc la série converge si  $\beta > 1$ , diverge sinon.

4. On utilise le critère de Raabe–Duhamel dans tout l'exercice. Pour les points (a) et (b), on obtient respectivement  $\alpha = 3/2$  et  $\alpha = -1/2$ , donc la série (a) converge et la série (b) diverge. Pour (c), on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^p - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) \sum_{k=0}^{p-1} \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \sum_{k=0}^{p-1} 1^k = \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Donc la série converge si  $p > 2$  et diverge si  $p < 2$ . Pour  $p = 2$ , on peut utiliser une comparaison avec la série de terme général  $y_n = 1/n$ , qui est divergente. On a que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(2n+2)^2} > 0 \implies \frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{y_{n+1}}{y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et l'on conclut par le second critère de comparaison que la série est divergente.

6. L'hypothèse implique  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{n}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On conclut, comme ci-dessus, par comparaison avec la série de terme général  $y_n = 1/n$ .

7. Pour cet exercice, il est utile de faire une étude de fonction élémentaire par les méthodes usuelles, et d'esquisser le graphe de  $f$  dans chaque cas. On obtient alors les résultats suivants :

(a)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $\inf f = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ,  $\sup f = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ , pas de min/max ;

(b)  $D(f) = \mathbb{R}^*$ ,  $\inf f = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ,  $\sup f = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , pas de min/max ;

(c)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $\inf f = 1$ ,  $\sup f = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ,  $x = 0$  est un point de minimum global, avec  $f_{\min} = f(0) = 1 = \inf f$  (dans ce cas, l'infimum de  $f$  est atteint au point  $x = 0$ , c'est un minimum) ;

(d)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $\inf f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\sup f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $x = 1 - \sqrt{3}/3$  point de max local,  $x = 1 + \sqrt{3}/3$  point de min local ;

(e)  $D(f) = (-1, \infty)$ ,  $\inf f = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ ,  $\sup f = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , pas de min/max ;

(f)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $\inf f = 0$ ,  $\sup f = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ,  $x = 0$  est un point de minimum global, avec  $f_{\min} = f(0) = 0 = \inf f$  (l'infimum est atteint) ;

(g)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $\inf f = -1$ ,  $\sup f = 1$ ,  $x = 2k$  point de max global,  $x = 2k + 1$  point de min global,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  ( $\inf f$  et  $\sup f$  sont atteints en une infinité de points où  $f(x) = f_{\min} = -1$ , resp.  $f(x) = f_{\max} = 1$ ) ;

(h)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\inf f = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ,  $\sup f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ,  $x = \pi/2 + 2k\pi$  point de min local,  $x = -\pi/2 + 2k\pi$  point de max local,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .