Corrigé 4

1. (a) Premièrement, puisque $x_n^2 \geq 0$, on a que $x_{n+1} - x_n = -\ln(1+x_n^2) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(x_n)$ est décroissante. D'autre part, l'inégalité élémentaire $\ln(1+t) \leq t \ \forall t \geq 0$ donne

$$x_{n+1} = x_n - \ln(1+x_n^2) \geq x_n - x_n^2 = x_n(1-x_n).$$

Par conséquent, $x_{n+1} \geq 0$ si $x_n \in [0,1]$. Puisque $x_0 \in [0,1]$, on obtient par récurrence que $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(x_n)$ est décroissante et bornée inférieurement, donc convergente. Sa limite $\ell$ doit alors satisfaire l'équation $\ell = \ell - \ln(1+\ell^2)$, soit $\ln(1+\ell^2) = 0$, i.e. $\ell = 0$.

(b) On observe que $x_{n+1} - x_n = \frac{1-x_n}{2}$ est $\geq 0$ si $x_n \leq 1$ et $\leq 0$ si $x_n \geq 1$. Supposons $x_0 \leq 1$. Nous allons montrer par récurrence que, dans ce cas, $(x_n)$ est croissante et $x_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Tout d'abord, $x_1 - x_0 = \frac{1-x_0}{2} \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq x_0$. D'autre part, $1 - x_1 = \frac{1-x_0}{2} \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1$, ce qui achève l'initialisation. Si l'on suppose maintenant que $x_{n-1} \leq x_n \leq 1$, on obtient bien $x_n \leq x_{n+1} \leq 1$. En effet, $x_{n+1} - x_n = \frac{1-x_n}{2} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$ et $1 - x_{n+1} = \frac{1-x_n}{2} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq 1$, ce qui conclut la démonstration. Par un argument analogue, si $x_0 \geq 1$, alors $(x_n)$ est décroissante et $x_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi $(x_n)$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ vers la limite $\ell = 1$ (solution de $\ell = (\ell+1)/2$).

(c) On observe tout d'abord que, si la limite $\ell$ existe, alors

$$\ell = \frac{\ell^2+3}{4} \iff (\ell-1)(\ell-3) = 0 \iff \ell \in \{1,3\}.$$

On remarque également que $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4}(x_n - 1)(x_n - 3)$. On distingue alors les cas $x_0 \in [1,3]$ et $x_0 > 3$. Un raisonnement par récurrence analogue à celui du point (b) montre alors que, pour $x_0 \in [1,3]$, $(x_n)$ est décroissante et bornée inférieurement par 1, donc converge vers $\ell = 1$ (si $x_0 = 1$ ou $x_0 = 3$ alors on a $x_n \equiv 1$ ou $x_n \equiv 3$ respectivement). Dans le cas $x_0 > 3$, on obtient par récurrence que $(x_n)$ est strictement croissante, avec $x_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. En effet, si $(x_n)$ était bornée supérieurement, elle admettrait une limite $\ell \in \{1,3\}$. Mais nous avons $x_n > x_0 > 3 \ \forall n \geq 1$ ↯

(d) La suite est donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ où la fonction $f(x) = a + b/x$ est décroissante, donc la suite n'est pas monotone. En revanche $f \circ f$ est croissante, donc les sous-suites $(x_{2n})$ et $(x_{2n+1})$ sont monotones. Par ailleurs, on a que $a < x_n < a + b/a$ pour tout $n$. Ainsi $(x_{2n})$ et $(x_{2n+1})$ sont bornées, donc convergentes. Leurs limites respectives $u, v$ sont solutions de l'équation $x = (f \circ f)(x) \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$, d'où $u, v \in \{\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2+4b})\}$. Comme $u, v \geq 0$, on conclut que $\lim x_n = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+4b})$.

2. Utilisant l'indication donnée, on remarque tout d'abord que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n + \cdots + u_0}{v_n + \cdots + v_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_0}{b_{n+1} - b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

On doit donc montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \implies \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + \cdots + u_0}{v_n + \cdots + v_0} = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\ell - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (\ell + \varepsilon)v_n$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour $n > N$, en écrivant $u_n + \cdots + u_0 = u_n + \cdots + u_N + u_{N-1} + \cdots + u_0$, on obtient l'encadrement

$$(\ell - \varepsilon)\frac{v_n + \cdots + v_N}{v_n + \cdots + v_0} + \frac{u_{N-1} + \cdots + u_0}{v_n + \cdots + v_0} \leq \frac{u_n + \cdots + u_0}{v_n + \cdots + v_0} \leq (\ell + \varepsilon)\frac{v_n + \cdots + v_N}{v_n + \cdots + v_0} + \frac{u_{N-1} + \cdots + u_0}{v_n + \cdots + v_0}.$$

Il suffit donc de passer à la limite dans ces inégalités, en remarquant que $v_n + \cdots + v_0 \to \infty \implies$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n + \cdots + v_N}{v_n + \cdots + v_0} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{N-1} + \cdots + u_0}{v_n + \cdots + v_0} = 0.$$

Il vient alors

$$(\ell - \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + \cdots + u_0}{v_n + \cdots + v_0} \leq (\ell + \varepsilon).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, le théorème est démontré. □

3. En appliquant le théorème de Stolz–Cesàro, on obtient :

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{(n+1)^p - n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{pn^{p-1}+\cdots+1} = 0$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(n)}{\ln(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{\ln((n+1)!) - \ln(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{\ln(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln(n+1)} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1)} = 1$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^p - \sum_{k=1}^{n} k^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots + 1} = \frac{1}{p+1}$$

4. (a) Soit $\varepsilon > 0$. On distingue deux cas. Si $\ell = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $-\varepsilon x_{n-1} < x_n < \varepsilon x_{n-1}$. Ainsi, par itération,

$$x_n \leq x_N \varepsilon^{n-N}, \quad \text{d'où } \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{\frac{x_N}{\varepsilon^N}}\varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Le nombre $\frac{x_N}{\varepsilon^N} > 0$ étant fixé, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 0$. Pour $\ell > 0$, un raisonnement analogue conduit à l'estimation

$$\sqrt[n]{\frac{x_N}{(\ell-\varepsilon)^N}}(\ell-\varepsilon) < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{x_N}{(\ell+\varepsilon)^N}}(\ell+\varepsilon), \quad \forall n \geq N.$$

Supposant $\varepsilon \in (0,\ell)$ et passant à la limite, il vient donc $(\ell-\varepsilon) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq (\ell+\varepsilon)$, d'où le résultat. □

5. (a) En appliquant le résultat précédent, on a bien que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

(b) Soit $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i$ un polynôme de degré $k \geq 0$ quelconque, tel que $a_k > 0$. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{a_k n^k} = 1$.

Utilisant la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\dfrac{P(n)}{a_k n^k} - 1\right| < \dfrac{1}{2} \quad \forall n \geq N$.

On a ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{1}{2} < \frac{P(n)}{a_k n^k} < \frac{3}{2} \iff \frac{a_k n^k}{2} < P(n) < \frac{3a_k n^k}{2} \iff \sqrt[n]{\frac{a_k n^k}{2}} < \sqrt[n]{P(n)} < \sqrt[n]{\frac{3a_k n^k}{2}}$$

$$\iff \sqrt[n]{\frac{a_k}{2}}(\sqrt[n]{n})^k < \sqrt[n]{P(n)} < \sqrt[n]{\frac{3a_k}{2}}(\sqrt[n]{n})^k.$$

Puisque $a_k > 0$, on sait du cours que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a_k}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a_k}{2}} = 1$. Le résultat découle donc du théorème des deux gendarmes et du point (a).

7. (a) $|u_n| = \left|\dfrac{n^2\sin(n) - n\cos(n)}{n^3+1}\right| = \underbrace{\dfrac{n^2}{n^3+1}}_{\to 0} \underbrace{\left|\sin(n) - \dfrac{1}{n}\cos(n)\right|}_{\text{borné}} \to 0$, par l'exercice 6 (a).

(b) $u_n = \dfrac{(1+a)^n(1-n)}{n+1} = \underbrace{(1+a)^n}_{\to\infty} \underbrace{\dfrac{1-n}{n+1}}_{\to -1} \to -\infty$, par l'exercice 6 (d) et (e).

(c) $u_n = n \underbrace{\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{2+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}_{\geq \frac{\ln(3/2)}{5/2} > 0} \to \infty$, par l'exercice 6 (b).