

CORRIGÉ 3

1. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$. On cherche un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$. On part de cette inégalité et on travaille par équivalences. Observant que $1 - \varepsilon < (1 + \frac{1}{n})^k$ est vrai pour tout $n \geq 1$, on a

$$|(1 + \frac{1}{n})^k - 1| < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < (1 + \frac{1}{n})^k < 1 + \varepsilon \iff \frac{1}{n} < (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{k}} - 1 \iff n > \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{1/k} - 1}.$$

Il suffit donc de choisir un entier $N \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{1/k} - 1}$.

2. (a) Ces limites se calculent en simplifiant la fraction par la plus haute puissance de n :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a^2 n + 1} + 2}{\sqrt{n + 3} + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a^2 + n^{-1}} + 2n^{-1/2}}{\sqrt{1 + 3n^{-1}} + 4n^{-1/2}} = \sqrt{a^2} = |a|$
- si $b \neq 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{an^6 + n^2 + 2} - 2n^2}{bn^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{a + n^{-4} + 2n^{-6}} - 2}{b + n^{-2}} = \frac{\sqrt[3]{a} - 2}{b}$

(b) Ces limites se calculent en “amplifiant par le conjugué” :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + an + b} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + b} - n) \frac{\sqrt{n^2 + an + b} + n}{\sqrt{n^2 + an + b} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + an + b - n^2}{\sqrt{n^2 + an + b} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + an + b - n^2}{\sqrt{n^2 + an + b} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{\sqrt{n^2 + an + b} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + bn^{-1}}{\sqrt{1 + an^{-1} + bn^{-2}} + 1} = \frac{a}{2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a^2 n^2 + 1} - \sqrt{b^2 n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n^2 + 1 - (b^2 n^2 + 2)}{\sqrt{a^2 n^2 + 1} + \sqrt{b^2 n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - b^2)n^2 - 1}{\sqrt{a^2 n^2 + 1} + \sqrt{b^2 n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - b^2)n - n^{-1}}{\sqrt{a^2 + n^{-2}} + \sqrt{b^2 + 2n^{-2}}} = \begin{cases} -\infty & \text{si } |a| < |b| \\ 0 & \text{si } |a| = |b| \neq 0 \\ 1 - \sqrt{2} & \text{si } |a| = |b| = 0 \\ +\infty & \text{si } |a| > |b| \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + an^2 + bn + c - n^3}{(n^3 + an^2 + bn + c)^{2/3} + (n^3 + an^2 + bn + c)^{1/3}n + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + bn^{-1} + cn^{-2}}{(1 + an^{-1} + bn^{-2} + cn^{-3})^{2/3} + (1 + an^{-1} + bn^{-2} + cn^{-3})^{1/3} + 1} = \frac{a}{3}$

(c) Utilisant le fait que la fonction sin est 2π -périodique, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{4n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)).$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{4n^2 + n}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Attention : A la dernière étape, nous avons utilisé une propriété importante de la fonction sin qui n’a pas encore été abordée au cours, quelle est-elle ?

3. (a) Nous avons

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Pour la deuxième suite, nous avons, pour tout $n \geq 2$,

$$n - 1 \leq n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq n + 1 \implies \frac{n + 2}{n + 1} \leq \frac{n + 2}{n + \cos(\frac{n\pi}{2})} \leq \frac{n + 2}{n - 1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n + \cos(\frac{n\pi}{2})} = 1.$$

(b) On commence par récrire le terme général de la suite :

$$x_n = \frac{(n+1)^n n!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n!}{n^n}.$$

On observe alors que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{n \cdot n \cdot n \dots n} \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \frac{(n+1)^n n!}{n^{2n}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Nous avons ainsi encadré (x_n) par les suites (y_n) et (z_n) de termes généraux $y_n \equiv 0$ et $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = e \cdot 0 = 0,$$

il suit du théorème des deux gendarmes que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(c) On cherche y_n et z_n qui tendent vers la même limite et tels que $y_n \leq x_n \leq z_n$. Pour la borne inférieure, on observe que chaque numérateur est $\geq n^2$ et chaque dénominateur est $\leq n^3 + 5n$. Comme il y a $2n$ termes, on obtient

$$x_n \geq 2n \frac{n^2}{n^3 + 5n} =: y_n.$$

Inversement, pour la borne supérieure, on majore chaque terme de la somme en utilisant le plus grand des numérateurs et le plus petit des dénominateurs :

$$x_n \leq 2n \frac{n^2 + 2n - 1}{n^3 + 3n + 1} =: z_n.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

4. (a) Soit $M > 0$. On cherche $N = N(M) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \geq M$. Puisque $\sqrt{n} \geq M \Leftrightarrow n \geq M^2$, on voit que n'importe quel $N \geq M^2$ fait l'affaire. Donc on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Soit $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré $k \geq 1$, tel que $a_k > 0$. On a que

$$\sqrt{P(n)} = \sqrt{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0} = \sqrt{n^k} \sqrt{a_k + a_{k-1} n^{-1} + \dots + a_1 n^{-k+1} + a_0 n^{-k}},$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_k + a_{k-1} n^{-1} + \dots + a_1 n^{-k+1} + a_0 n^{-k}} = \sqrt{a_k} > 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^k} = (\sqrt{n})^k = +\infty$$

par la première partie de l'exercice. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{P(n)} = +\infty$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N > 0$ tel que $\frac{n^p}{a^n} < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On travaille par équivalences :

$$\frac{n^p}{a^n} < \varepsilon \iff n^p < \varepsilon a^n \iff n < \varepsilon^{1/p} a^{n/p} \iff n < \varepsilon^{1/p} (a^{1/p})^n.$$

On pose alors $b := a^{1/p} > 1$ et on développe le membre de droite en utilisant le binôme de Newton :

$$\frac{n^p}{a^n} < \varepsilon \iff n < \varepsilon^{1/p} (1 + (b-1))^n = \varepsilon^{1/p} \left(1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2} (b-1)^2 + \dots\right).$$

On remarque alors que $n \leq \varepsilon^{1/p} \frac{n(n-1)}{2} (b-1)^2 \iff n \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^{1/p} (b-1)^2}$. Ainsi, puisque tous les termes du développement ci-dessus sont positifs, on obtient que

$$n \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^{1/p} (b-1)^2} \Rightarrow n \leq \varepsilon^{1/p} \frac{n(n-1)}{2} (b-1)^2 \Rightarrow n < \varepsilon^{1/p} \left(1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2} (b-1)^2 + \dots\right) \Rightarrow \frac{n^p}{a^n} < \varepsilon.$$