Corrigé 2

1. Par hypothèse, $b-a>0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $n(b-a)>1$, i.e. $nb-na>1$. Donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $na<p<nb$. On peut alors prendre $c=p/n$.

2. Tout d'abord, A est non vide (car $0 \in A$) et borné supérieurement, donc s est fini. En effet, supposons par l'absurde que A n'est pas borné supérieurement. Alors pour tout $M>0$ il existe $x_M \in A$ tel que $x_M > M$, donc $x_M^2 > M^2$. On aboutit à une contradiction en choisissant par exemple $M>2$.

Montrons maintenant que $s^2=2$.
Supposons par l'absurde que $s^2<2$. Nous allons construire un nombre x tel que $x^2 \leq 2$ mais $x>s$, ce qui contredit la définition de s. Soit $\varepsilon \in (0,1]$. On cherche x sous la forme $x_\varepsilon = s+\varepsilon > s$. Comme $\varepsilon \leq 1$, on a

$$x_\varepsilon^2 = s^2+2s\varepsilon+\varepsilon^2 \leq s^2+2s\varepsilon+\varepsilon.$$

On déduit que $x_\varepsilon^2 \leq 2$ si $\varepsilon \leq \frac{2-s^2}{2s+1}$. Par l'hypothèse $s^2<2$, on a bien $\frac{2-s^2}{2s+1}>0$. On peut donc choisir $\varepsilon \in (0,1]$ tel que $\varepsilon \leq \frac{2-s^2}{2s+1}$, et le x_ε correspondant donne la contradiction désirée.
Supposons maintenant que $s^2>2$. Nous allons construire un nombre x tel que $x<s$ mais $x^2>2$, ce qui contredit à nouveau la définition de s. On écrit cette fois, $x_\varepsilon = s-\varepsilon$ pour $\varepsilon>0$. On a

$$x_\varepsilon^2 = s^2-2s\varepsilon+\varepsilon^2 > s^2-2s\varepsilon.$$

Donc $x_\varepsilon^2>2$ si $\varepsilon<\frac{s^2-2}{2s}$. Par l'hypothèse $s^2>2$, on a bien $\frac{s^2-2}{2s}>0$. On peut donc choisir $\varepsilon \in (0, \frac{s^2-2}{2s})$ et le x_ε correspondant donne la contradiction désirée.

Nous avons donc montré que $s^2<2$ et $s^2>2$ sont impossibles, d'où le résultat. $\square$

3. (a) A est clairement minoré par 0 et majoré par 1, donc A est borné. De plus, $0=\inf A$ car pour tout $\varepsilon>0$ il existe $x \in A$ tel que $0 \leq x \leq \varepsilon$. De même, $1=\sup A$ car pour tout $\varepsilon>0$ il existe $x \in A$ tel que $1-\varepsilon \leq x \leq 1$.

(b) Mêmes conclusions qu'au point (a). Mais dans ce cas $\inf A, \sup A \notin A$.

(c) Clairement, A n'est pas borné inférieurement, donc A n'est pas borné. Mais A est majoré par $\sqrt{2}$, et $\sqrt{2}=\sup A$. En effet, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (ex. 1), pour tout $\varepsilon>0$ il existe $x \in A$ tel que $\sqrt{2}-\varepsilon \leq x \leq \sqrt{2}$.

(d) A est minoré par 0 et majoré par 1, donc A est borné. On a que $1=\sup A \in A$. En outre, $0=\inf A \notin A$. En effet, pour tout $\varepsilon>0$ Archimède donne un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\varepsilon>1$, d'où $0<1/n<\varepsilon$.

4. (a) Supposons par l'absurde qu'il existe deux majorants s, s' de A qui satisfont la propriété

$$\forall \varepsilon>0\ \exists x \in A \quad \text{t.q.} \quad s-\varepsilon \leq x \leq s,$$

mais que $s \neq s'$. On peut également supposer s.p.d.g. que $s'<s$. On choisit alors $\varepsilon \in (0, s-s')$, de sorte que $s'<s-\varepsilon$. Ainsi, puisque s' est un majorant de A, on a $x \leq s' < s-\varepsilon$ pour tout $x \in A$ (un dessin peut aider). Donc $A \cap [s-\varepsilon, s] = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $s=\sup A$. Un argument similaire montre l'unicité de $\inf A$.

(b) (i) Tout d'abord, il est clair que, si A est minoré alors $-A$ est majoré (symétrie par rapport à l'origine). Par définition de l'inf,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists x \in A \quad \text{t.q.} \quad \inf A \leq x \leq \inf A+\varepsilon.$$

Posant $y=-x \in (-A)$ et multipliant la paire d'inégalités par -1, ceci équivaut à

$$\forall \varepsilon>0\ \exists y \in (-A) \quad \text{t.q.} \quad -\inf A-\varepsilon \leq y \leq -\inf A.$$

Il découle alors de l'unicité prouvée sous (a) que $\sup(-A) = -\inf A$. La preuve que $\inf(-A) = -\sup A$ est analogue.

(ii) Soit $\varepsilon>0$. Il existe $x_A \in A$ et $x_B \in B$ tels que $\sup A-\varepsilon/2 \leq x_A \leq \sup A$ et $\sup B-\varepsilon/2 \leq x_B \leq \sup B$. Donc $x=x_A+x_B$ satisfait $\sup A+\sup B-\varepsilon \leq x \leq \sup A+\sup B$. Invoquant à nouveau l'unicité du sup, on obtient $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$. Le fait que $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$ se démontre de façon similaire.

(iii) On donne la solution pour $\inf(B) = 1/\sup(A)$ dans le cas où A est borné supérieurement, i.e. $\sup(A) \in (0, \infty)$. Par définition du supremum, pour tout $\varepsilon \in (0, \sup(A))$ il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon \leqslant a \leqslant \sup(A)$. On déduit qu'il existe $b = 1/a \in B$ tel que

$$\frac{1}{\sup(A)} \leqslant b \leqslant \frac{1}{\sup(A) - \varepsilon}.$$

Or, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe un unique $\varepsilon \in (0, \sup(A))$ tel que

$$\frac{1}{\sup(A) - \varepsilon} = \frac{1}{\sup(A)} + \varepsilon'.$$

On conclut que, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $b \in B$ tel que

$$\frac{1}{\sup(A)} \leqslant b \leqslant \frac{1}{\sup(A)} + \varepsilon'.$$

Le résultat découle alors de l'unicité de $\inf(B)$.

(c) Il suffit de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-|x| \leq x \leq |x|$. Notant $B = \{|x| \,;\, x \in A\}$, on obtient alors que $-\sup B \leq x \leq \sup B$, pour tout $x \in A$.

5. (a) (i) L'intersection $\cap_n A_n$ est bornée. (ii) En général $\cup_n A_n$ n'est pas borné. Pour (i), il suffit de remarquer que $\cap_n A_n \subset A_{17}$, qui est borné. Pour (ii), considérer les intervalles $A_n = [n, n+1],\ n \in \mathbb{N}$.

(b) Si A est fini, supposons qu'il contient k éléments $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Alors $\inf A = a_1$ et $\sup A = a_k$, donc A est bien borné inférieurement et supérieurement.

6. (a) (i) Alors est f est injective, ce qui se montre par contraposition. Soit $y \in B$. Si $f(x) = f(x') = y$, alors $x = x'$ car l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution.

(ii) Dans ce cas f est surjective. Pour tout $y \in A$, il existe (au moins) un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

(iii) Alors f est bijective.

(b) Nous savons de la théorie des équations du deuxième degré (Viète) que la droite $x = x_{\min} := -b/2a$ est un axe de symétrie du graphe de f (parabole), et que la fonction atteint son minimum/maximum en ce point si $a > 0/a < 0$. Par conséquent, f n'est pas surjective : si $a > 0$, on a que $(-\infty, c - b^2/4a) \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset$; si $a < 0$, on a que $(c - b^2/4a, +\infty) \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset$. D'autre part, la symétrie du graphe montre que f n'est pas injective ; par exemple, on vérifie aisément que $f(-b/2a - 1) = f(-b/2a + 1)$.

(c) Pour montrer que f est injective, on procède par contraposition : on suppose que $f(a) = f(b)$ et l'on montre que $a = b$. En effet,

$$a^3 + a = b^3 + b \iff (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \implies a = b \text{ ou } a^2 + ab + b^2 + 1 = 0.$$

Nous aurons terminé si la seconde relation est impossible pour $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $a^2 + ab + b^2 + 1 = 0$. On a alors

$$ab = (a + b)^2 + 1 > 0 \implies a^2 + ab + b^2 + 1 > 0,$$

contradiction ↯

D'autre part, f est aussi surjective. En effet, l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ admet pour tous $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $27q^2 + 4p^3 \geq 0$ la solution (réelle)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Autre approche : constater que le graphe de f intersecte l'axe Ox : en effet, la fonction f est continue et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, ce qui montre qu'elle prend toutes les valeurs réelles. Mais cet argument fait appel à la théorie des fonctions continues (théorème de la valeur intermédiaire), qui fait l'objet d'un prochain chapitre...