

## CORRIGÉ 1

1. (a) (i) La proposition à démontrer est  $P(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Initialisation:  $n = 1 : \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et l'on en déduit  $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ . En effet,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{\text{hyp.réc.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \checkmark$$

Nous avons montré que  $P(1)$  est vraie et que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , le résultat est donc démontré.  $\square$

(ii) La proposition à démontrer est  $P(n) : (\sum_{k=1}^n k)^2 = \sum_{k=1}^n k^3$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Initialisation:  $n = 1 : (\sum_{k=1}^1 k)^2 = 1 = \sum_{k=1}^1 k^3 \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose  $(\sum_{k=1}^n k)^2 = \sum_{k=1}^n k^3$ . On a alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n k\right)(n+1) + (n+1)^2$$

$$\stackrel{\text{hyp.réc.}}{=} \sum_{k=1}^n k^3 + 2\left(\sum_{k=1}^n k\right)(n+1) + (n+1)^2 \stackrel{(i)}{=} \sum_{k=1}^n k^3 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 \checkmark$$

Nous avons montré que  $P(1)$  est vraie et que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , le résultat est donc démontré.  $\square$

(b) La proposition à démontrer est  $P(n) : n! \geq 2n - 1$ ,  $n \geq 3$ .

Initialisation:  $3! = 6 \geq 2 \cdot 3 - 1 = 5 \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose  $n! \geq 2n - 1$  et l'on montre  $(n+1)! \geq 2(n+1) - 1$ . En effet,

$$(n+1)! = (n+1)n! \stackrel{\text{hyp.réc.}}{\geq} (n+1)(2n-1) = 2n^2 + n - 1 > 2(n+1) - 1 \quad \forall n \geq 3.$$

Pour démontrer cette dernière inégalité, il suffit de constater qu'elle équivaut à  $2n^2 - n - 2 > 0$ . Or l'unique racine positive du polynôme  $2x^2 - x - 2$  est  $x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) \approx 1.28 < 3$ , donc l'inégalité est vraie pour tout  $n \geq 3$ .

Nous avons ainsi montré que  $P(3)$  est vraie et que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  pour tout  $n \geq 3$ . Le résultat est donc démontré.  $\square$

(c) Je préfère écrire la formule à démontrer sous la forme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

qui est équivalente à celle énoncée par symétrie des coefficients binômiaux (triangle de Pascal).

Initialisation:  $(x+y)^1 = x+y$  et  $\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x+y \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$  et l'on montre  $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$ .

On écrit

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{n+1} &= x(x+y)^n + y(x+y)^n = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
 &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \binom{n}{1} x^n y + \binom{n}{2} x^{n-1} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n} x y^n \\
 &\quad + \binom{n}{0} x^n y + \binom{n}{1} x^{n-1} y^2 + \dots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n-1} x y^n + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
 &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \quad \checkmark \quad \square
 \end{aligned}$$

2. (a) Si  $x, y \leq 0$ , alors  $xy \geq 0$  et donc  $|xy| = xy$ . D'autre part,  $|x||y| = (-x)(-y) = xy$ .  
Si  $x \leq 0$  et  $y \geq 0$ , alors  $xy \leq 0$  et donc  $|xy| = -xy$ . D'autre part,  $|x||y| = (-x)y = -xy$ .  
Les autres cas sont similaires.

(b) Par définition, pour tout  $a \geq 0$ ,  $\sqrt{a}$  est l'unique solution  $s$  positive de l'équation  $s^2 = a$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$  donné, posons  $a = x^2 \geq 0$ . La solution positive de  $s^2 = x^2$  est  $s = -x$  si  $x \leq 0$  et  $s = x$  si  $x \geq 0$ . Donc on a bien  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

(c) Par (b),  $|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$ . D'autre part,  $|x| = \sqrt{x^2}$  et  $|y| = \sqrt{y^2}$ . Nous aurons donc prouvé le résultat si nous montrons que

$$\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}.$$

Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, nous avons les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &\iff x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2\sqrt{x^2}\sqrt{y^2} + y^2 \\
 &\iff xy \leq \sqrt{x^2 y^2} \iff xy \leq \sqrt{(xy)^2} \iff xy \leq |xy|.
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie, le résultat est démontré.

(d) Similaire à (c).

3. (a) Le domaine de définition de l'équation est  $D = (-\infty, 2]$ .

*Méthode 1.* Pour résoudre on élève au carré:

$$\sqrt{2-x} = x \iff 2-x = x^2 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff (x+2)(x-1) = 0 \iff x \in \{-2; 1\} \subset D.$$

On vérifie ensuite la présence d'éventuelles "solutions parasite":  $x = 1$  est bien solution mais  $x = -2$  donne  $2 = -2 \not\checkmark$  On retient donc l'unique solution  $x = 1$ .

*Méthode 2.* C'est la méthode la plus propre, on travaille par équivalences. En plus du domaine de définition  $D$ , il faut prendre en compte la condition de positivité due à la racine carrée:  $x \geq 0$ . On a alors:

$$\sqrt{2-x} = x, x \in [0, 2] \iff x^2 + x - 2 = 0, x \in [0, 2] \iff x = 1.$$

(b) La conclusion d'un tel raisonnement est que  $S \subset A$ ; cf. (a) Méthode 1 avec  $A = \{-2; 1\}$  et  $S = \{1\}$ . Si l'on travaille par équivalences, on obtient  $A = S$ ; cf. (a) Méthode 2.

4. (a) Sur le domaine de définition  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , on a

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < x-1 \iff \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} < x-1 \\ \text{et} \\ \frac{x-1}{x+1} > -(x-1). \end{cases}$$

D'une part,

$$\frac{x-1}{x+1} < x-1 \iff \frac{x-1}{x+1} - (x-1) < 0 \iff \frac{x(x-1)}{x+1} > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty).$$

D'autre part,

$$\frac{x-1}{x+1} > -(x-1) \iff \frac{x-1}{x+1} + (x-1) > 0 \iff \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} > 0 \iff x \in (-2, -1) \cup (1, +\infty).$$

En prenant l'intersection, on obtient donc l'ensemble solution  $S = (1, +\infty)$ .

(b) Sur le domaine de définition  $D = \mathbb{R}$ , on a

$$|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1 \iff \begin{cases} x^2 + 3x - 1 \geq x^2 + x + 1 \\ \text{ou} \\ x^2 + 3x - 1 \leq -(x^2 + x + 1). \end{cases}$$

Premièrement,

$$x^2 + 3x - 1 \geq x^2 + x + 1 \iff x - 1 \geq 0 \iff x \in [1, +\infty).$$

Deuxièmement,

$$x^2 + 3x - 1 \leq -(x^2 + x + 1) \iff x(x+2) \leq 0 \iff x \in [-2, 0].$$

En prenant la réunion, on obtient donc l'ensemble solution  $S = [-2, 0] \cup [1, +\infty)$ .

5. Les carrés de nombres entiers peuvent être répartis en deux sous-ensembles disjoints:

$$\{n^2; n \in \mathbb{N}\} = \{n^2; n \text{ pair}\} \cup \{n^2; n \text{ impair}\}.$$

Si  $n$  est pair, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2k$ , et donc  $n^2 = 4k^2$  est aussi pair. Si  $n$  est impair, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2k+1$ , et donc  $n^2 = 4k^2 + 2k + 1$  est aussi impair. Ainsi,  $n^2$  est pair/impair ssi  $n$  est pair/impair.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$ , tels que  $\text{pgcd}(p, q) = 1$  et  $(p/q)^2 = 3$ , i.e.

$$p^2 = 3q^2.$$

On commence par montrer que, sous nos hypothèses, ni  $q$  ni  $p$  ne peut être pair. Supposons par l'absurde qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $q = 2k$ . Alors l'équation donne

$$p^2 = 3q^2 = 12k^2 \implies p^2 \text{ pair} \implies p \text{ pair}.$$

Ainsi,  $p$  et  $q$  sont pairs, ce qui contredit l'hypothèse  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . Supposons maintenant que  $p = 2l$  pour un  $l \in \mathbb{N}$ . L'équation donne

$$4l^2 = 3q^2.$$

On suppose alors par l'absurde que  $q = 2n + 1$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ . Il vient

$$4l^2 = 3(4n^2 + 4n + 1) \implies 4l^2 - 12n^2 - 12n = 3,$$

ce qui est absurde car le membre de gauche de cette égalité est pair alors que le membre de droite est impair. Ainsi,  $q$  doit aussi être pair, ce qui contredit à nouveau l'hypothèse  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ .

On conclut donc que, pour satisfaire nos hypothèses et l'équation ci-dessus,  $p$  et  $q$  doivent tout deux être impairs: il existe  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $p = 2m+1$  et  $q = 2n+1$ . L'équation donne alors  $2m^2 + 2m - 6n^2 - 6n = 1$ , ce qui est absurde car le membre de gauche est pair alors que le membre de droite est impair.  $\zeta \square$

*Remarque:* En utilisant la décomposition en facteurs premiers des entiers, on montre que  $n$  est divisible par 3 ssi  $n^2$  est divisible par 3. Utilisant ce résultat, une preuve plus directe peut être donnée, en suivant exactement les étapes de la preuve de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ .