Corrigé Série de Noël

2. (a) On décompose

$$\int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y + \int_1^\infty y^{x-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

Pour tout $x > 0$ et $0 < y < 1$, on a $0 < y^{x-1}e^{-y} < y^{x-1}$. Comme la fonction $y \mapsto y^{x-1}$ est intégrable sur $(0,1)$ pour tout $x > 0$, on conclut que $\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y$ converge pour tout $x > 0$.

Pour l'intégrale sur $(1,\infty)$, on distingue les cas. Pour tout $0 < x \le 1$ et $y > 1$, on a $0 < y^{x-1}e^{-y} < e^{-y}$. Comme $y \mapsto e^{-y}$ est intégrable sur $(1,\infty)$, on conclut que $\int_1^\infty y^{x-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y$ converge pour tout $0 < x \le 1$. Supposons maintenant $x > 1$. On applique la forme limite du critère de comparaison avec $f(y) = y^{x-1}e^{-y}$ et $g(y) = e^{-y/2}$. On a

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\to\infty} y^{x-1}e^{-y/2} = 0$$

et g est intégrable sur $(1,\infty)$, donc $\int_1^\infty y^{x-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y$ converge pour tout $x > 1$.

(b) En intégrant par partie, on a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty y^x e^{-y}\,\mathrm{d}y = -y^x e^{-y}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x y^{x-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y = x\Gamma(x).$$

(c) En itérant l'identité obtenue au point (b) avec $x = n \in \mathbb{N}$, on obtient bien

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!$$

car $\Gamma(1) = 1$.

4. (a) En faisant le changement de variable $s = xt$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)+g(x)\right) = f'(x)+g'(x) &= 2\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)e^{-x^2} + \int_0^1 (-2x)e^{-x^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 xe^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \int_0^1 e^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}(xt)\right) \\ &= 2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right) = 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}$, donc $f(x)+g(x) = f(0)+g(0) = \pi/4$.

(b) On remarque que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} = 0, \quad \forall t\in[0,1].$$

En échangeant limite et intégrale,[1] on obtient alors $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ et l'on déduit du point (a) que

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right) = \left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2,$$

d'où le résultat.

5. (a) En intégrant par parties, on obtient facilement que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \ge 2. \tag{1}$$

1. Puisque $\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \leqslant e^{-x^2}$ pour tout $t\in[0,1]$, on a que $\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \to 0$ uniformément en $t\in[0,1]$ lorsque $x\to\infty$. Ceci permet de justifier l'échange de la limite et de l'intégrale, en suivant la preuve du théorème 8.5.1. La dérivée par rapport à x sous l'intégrale dans le calcul de $g'(x)$ au point (a) est plus délicate à justifier dans le cadre de l'intégrale de Riemann...

Par ailleurs,

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1.$$

On en déduit que

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)\cdot(2k-2)\cdots 4\cdot 2} I_0 = \frac{(2k)\cdot(2k-1)\cdot(2k-2)\cdot(2k-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{((2k)\cdot(2k-2)\cdots 2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)\cdot(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdots 3\cdot 1} I_1 = \frac{((2k)\cdot(2k-2)\cdots 2)^2}{(2k+1)\cdot(2k)\cdot(2k-1)\cdot(2k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}.$$

(b) Pour tout $0 \leq x \leq \pi/2$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$. Ainsi,

$$\sin^{n-1}(x) \geq \sin^n(x) \geq 0, \quad \forall n \geq 1,\ \forall x \in [0, \pi/2],$$

ce qui entraîne $\sin^{n-1}(x) \geq \sin^n(x) \geq 0$, d'où $I_{n-1} \geq I_n > 0$, pour tout $n \geq 1$. Par (1), on a alors

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1, \quad \forall n \geq 2.$$

Il suit donc du principe des deux gendarmes que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.

(c) Par les points (a) et (b), on a que

$$1 = \lim_{k\to\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdots(2k-2)\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}\right]^2 \frac{1}{2k+1}\frac{2}{\pi} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdots(2k-2)\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}\right]^2 \frac{1}{k\pi},$$

d'où la formule de Wallis : $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}\left[\dfrac{2\cdot 4\cdots(2k-2)\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}\right]^2 = \pi$, qui s'écrit également $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}\dfrac{(2^k k!)^4}{((2k)!)^2} = \pi$.

Par les formules établies au point (a), on en déduit que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque $n \to \infty$.

(d) Finalement, on trouve $\ell^{-1} = \sqrt{2\pi}$ en injectant l'estimation $n! \sim \ell^{-1}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ dans les factoriels qui apparaissent dans la formule $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et en utilisant l'estimation précédente, $I_{2k} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4k}}$.

6. (a) En intégrant par partie, il vient

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin^2(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \implies \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin^2(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) En utilisant l'indication, on obtient

$$\begin{aligned}
(1-x^2)^{-1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}(-x^2)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}x^{2k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)}x^{2k}, \quad \forall x \in (-1,1). \qquad (2)
\end{aligned}$$

On déduit en intégrant que [2]

$$\arcsin(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \forall x \in (-1,1). \qquad (3)$$

2. Le rayon de convergence de la série entière dans l'équation (2) est égal à 1 et le théorème 7.2.9 donne la relation entre (2) et (3) sur l'intervalle $(-1, 1)$.

(c) Par les points (a) et (b), nous avons que [3]

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{8} &= \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)} \frac{1}{2k+1} \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)} \frac{1}{2k+1} \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Par le changement de variable $x = \sin(t)$, nous obtenons

$$
\int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}(t)\,\mathrm{d}t = I_{2k+1} = \frac{(2k)\cdot(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdots 3\cdot 1},
$$

d'où

$$
\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
\Longrightarrow\ &\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

3. L'échange de la somme et de l'intégrale peut être justifié par le théorème 8.5.1 du cours ou par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.