CORRIGÉ 14

1. Sans perte de généralité, supposons que f est croissante. Considérons la subdivision σ_n de $[a,b]$ définie par

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Comme f est croissante, on a $m_i = f(x_{i-1})$ et $M_i = f(x_i)$, pour tout $i = 0, \ldots, n$. Alors

$$\overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Ainsi, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) < \varepsilon$. Donc f est intégrable par le critère de Darboux-Cauchy.

2. (a) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{4x^2-12x+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+5}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2x-3} + \frac{8}{(2x-3)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-3| - \frac{4}{2x-3} + C\,;$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2+x)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C\,;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^6+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 2 + \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 3\arctan x + C.$

3. (a) Pour tout $x \in (2,\infty)$, $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}} \iff x = \varphi(t) := 1 + \dfrac{t^2}{t^2-1}$. Alors $\varphi'(t) = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}$ et l'intégrale auxiliaire est

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(\frac{t^2}{t^2-1} - 1) + \sqrt{(\frac{t^2}{t^2-1})(\frac{t^2}{t^2-1} - 1)}} \cdot \left(\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -2\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{1}{t^2-1} + \sqrt{\frac{t^2}{(t^2-1)^2}}\right)(t^2-1)^2} \\
&= -2\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2-t-1} = -2\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{1}{t+1} + C.
\end{aligned}$$

En substituant $t = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, on trouve alors, après quelques calculs,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2) + \sqrt{x^2-3x+2}} = \frac{1}{2}\ln\left(2x - 3 + 2\sqrt{x^2-3x+2}\right) + \sqrt{x^2-3x+2} - (x-2) + C, \quad \forall x \in (2,\infty).$$

(b) Pour tout $x \in (0,2)$, $t = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}} \iff x = \varphi(t) := \dfrac{2t^2}{t^2+1}$. Alors $\varphi'(t) = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$ et l'intégrale auxiliaire est

$$\int \frac{1}{\left(\frac{2t^2}{t^2+1} + 2\right)\sqrt{\frac{4t^2}{t^2+1} - \frac{4t^4}{(t^2+1)^2}}} \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \cdots = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}t}{(\sqrt{2}t)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + C.$$

Donc $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{2x}{2-x}}\right) + C, \quad \forall x \in (0,2).$

4. Le changement de variable $t = a+b-x$, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$, donne $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(t)(-\mathrm{d}t) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$$\implies \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\arctan(t)\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4}\,;$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \ln\Big(1+\tan\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \ln\Big(\frac{2}{1+\tan x}\Big)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln 2\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x \implies \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \ln 2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

5. (a) Pour $x \in (0,a)$, on pose $x = \varphi(t) := a\sin t$, avec $t \in (0,\pi/2)$. On a bien que $\varphi : (0,\pi/2) \to (0,a)$ est un difféomorphisme et $\varphi \in C^1([0,\pi/2])$. Donc le TCV donne

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\cos t>0}{=} a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\Big[t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

(b) Pour $x \in (0,a)$, on pose $x = a\sinh t,\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t,\ t \in (0,\operatorname{argsh}(1))$, et le TCV donne

$$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \frac{a^2\sinh^2 t}{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 t}}\,a\cosh t\,\mathrm{d}t = a^2\int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \sinh^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\operatorname{argsh}(1)} (\cosh 2t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\Big[\frac{1}{2}\sinh 2t - t\Big]_0^{\operatorname{argsh}(1)} = \frac{a^2}{2}\Big[\sinh t\cosh t - t\Big]_0^{\operatorname{argsh}(1)} = \frac{a^2}{2}\Big[\sqrt{2}-\ln\big(1+\sqrt{2}\big)\Big].$$

(c) $11/3 - \ln 16$ (cf. exercice 4 (b), série 13) ; (d) $2\pi\sqrt{3}/3$ (cf. exercice 5, série 13).

(b) $\displaystyle V = \pi\int_0^1 y^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\Big[1+\frac{1}{2}\sinh(2)\Big].$

6. (a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^t = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda t}-1) = \frac{1}{\lambda}.$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{i.p.p.}}{=} \lim_{t\to\infty}\Big[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{\ln t+1}{t} = 1.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} x(\ln x-1)\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}(-1-t(\ln t-1)) = -1.$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^4 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-2^+\\ b\to 4^-}}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-2^+\\ b\to 4^-}} \arcsin\Big(\frac{x-1}{3}\Big)\Big|_a^b$

$$= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi.$$

7. (a) On compare l'intégrande $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ avec $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Comme $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in (1,\infty)$, l'exercice 7 (b) implique que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ converge.

(b) L'intégrande $f(x) = \dfrac{x}{x^2+\cos^2 x}$ étant continu à droite en $x=0$, la convergence de l'intégrale dépend du comportement de f à l'infini : $f(x) = \dfrac{1}{x+(\cos^2 x)/x} \sim \dfrac{1}{x}$ $(x\to\infty)$. On entend par là que $f(x) = \dfrac{1}{x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ lorsque $x\to\infty$, ce que l'on vérifie rigoureusement en comparant $f(x)$ avec $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

On a que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+\cos^2 x} = 1$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$

$$\implies \int_1^\infty \frac{x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \infty \implies \int_0^\infty \frac{x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}_{\text{intégrale définie}} + \int_1^\infty \frac{x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

(c) L'intégrande $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln^2 x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}}$ étant continu à droite en $x = 2$, la convergence de l'intégrale dépend du comportement de f à l'infini : $f(x) = \dfrac{1 - 1/\ln x}{(\ln x + 1/\ln x)\sqrt{x^2 - x + 1}} \sim \dfrac{1}{(\ln x)x} \quad (x \to \infty)$.

On compare donc $f(x)$ avec $g(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. On a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x(\ln x - 1)}{(\ln^2 x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - 1}{(\ln x + 1/\ln x)\sqrt{1 - 1/x + 1/x^2}} = 1$$

et $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^t = \infty \implies \int_2^\infty \frac{\ln x - 1}{(\ln^2 x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}}\,\mathrm{d}x = \infty.$

(d) Comme $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = 1$, l'exercice 7 (a) implique que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty \sin(e^{-x})\,\mathrm{d}x$ converge.

(e) L'intégrande $f(x) = \pi/2 - \arctan(x^2)$ étant continu à droite en $x = 0$, il suffit d'étudier le comportement asymptotique de $f(x)$ lorsque $x \to \infty$. C'est la vitesse à laquelle $\pi/2 - \arctan(x^2) \to 0$ qui est déterminante. On observe que, pour tout $x > 0$,

$$\tan\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\Big) = \operatorname{cotan}\big(\arctan(x^2)\big) = \frac{1}{x^2} \implies \frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) = \arctan\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Donc $f(x) = \arctan(1/x^2) \sim 1/x^2$ lorsque $x \to \infty$. Or $1/x^2$ est intégrable à l'infini ($\int_1^\infty \mathrm{d}x/x^2 = 1$), donc l'intégrale $\int_0^\infty (\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2))\,\mathrm{d}x$ converge.

(f) L'intégrande $\ln(\sin x)$ est continue sur $(0, \pi/2]$, mais $\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin x) = -\infty$. La vitesse de cette divergence déterminera la convergence ou non de l'intégrale. Or,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x/\sin x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1,$$

donc l'exercice 7 (c) implique que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ converge.

(g) On remarque tout d'abord que, si elle existe, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$. Observant alors que $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ quand $x \to 0^+$, et que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} < \infty$, on conclut que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} < \infty$.

(h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$. La première intégrale converge car

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

La seconde est également convergente car

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = 1 \quad \text{et} \quad \int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ converge.