Corrigé 13

1. Comme f est continue sur $[a,b)$, une primitive sur cet intervalle est donnée par $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette fonction est donc une primitive de f sur (a,b), tout comme F. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$, pour tout $x \in (a,b)$. Ainsi $\lim_{x\to a^+} F(x)$ existe et vaut C. La fonction $\widetilde{F} : [a,b) \to \mathbb{R}$, $\widetilde{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$, a donc les propriétés requises.

2. $f(x) = \ln(x)/(x+1)$ étant continue sur $(0,\infty)$, elle admet une primitive F sur cet intervalle, d'où

$$g(t) = F(t) - F(1/t) \implies g'(t) = F'(t) + F'(1/t)/t^2 = f(t) + f(1/t)/t^2 = \frac{(t-1)\ln t}{t^2+t}, \quad \forall t > 0.$$

3. (a) $\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(b) $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - \int 2xe^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(c) $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C,\ \forall x > 0$ (i.p.p. en posant $u = \ln x,\ v' = 1$) ;

(d) $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)^2 + x + C,\ \forall x > 0$ (en intégrant deux fois par parties) ;

(e) Pour $\alpha \neq -1$:
$\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = x^\alpha x(\ln x - 1) - \int \alpha x^{\alpha-1}x(\ln x-1)\,\mathrm{d}x = x^{\alpha+1}(\ln x - 1) - \alpha\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x + \alpha\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$
$\Rightarrow (1+\alpha)\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = x^{\alpha+1}(\ln x - 1) + \frac{\alpha}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \Rightarrow \int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x - 1) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1} + C,\ \forall x > 0.$
Pour $\alpha = -1$:
$\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \int x^{-1}\ln x\,\mathrm{d}x = \ln(x)^2 - \int x^{-1}\ln x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int x^{-1}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x)^2 + C,\ \forall x > 0.$

(f) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int \frac{1}{2}x^2 2\ln x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x$
$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - (\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2) + C = \frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C,\ \forall x > 0$ (en utilisant (e) avec $\alpha = 1$) ;

(g) $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$
$\implies \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(i) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(k) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\,\mathrm{d}x$
$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(m) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,\ \forall x \in [-1,1]$;

(n) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int\,\mathrm{d}x = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C,\ \forall x \in [-1,1].$

4. (a) On fait le changement de variable $x = \varphi(t) := t^2$. On a que $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ est un difféomorphisme avec $\varphi'(t) = 2t > 0$ pour tout $t > 0$. L'intégrale auxiliaire est donc $\int 2t\cos t\,\mathrm{d}t = 2(t\sin t + \cos t) + C$ (exercice 3 (i)), d'où $\int \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}) + C$, pour $x \in (0,\infty)$. Comme $\cos(\sqrt{x})$ est continue sur $[0,\infty)$, l'exercice 1 $\implies \int \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}) + C$, pour tout $x \in [0,\infty)$.

(b) On fait ici le changement de variable $t^2 = x+1,\ x = \varphi(t) := t^2 - 1$. On a que $\varphi : (0,\infty) \to (-1,\infty)$ est un difféomorphisme avec $\varphi'(t) = 2t > 0$ pour tout $t > 0$. L'intégrale auxiliaire est donc

$$\int \frac{t^2+1}{t+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \Big(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 2\ln(t+1)\Big) + C,$$

d'où

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - (x+1) + 4(x+1)^{1/2} - 4\ln((x+1)^{1/2}+1) + C, \quad \forall x \in (-1,\infty).$$

Le résultat de l'exercice 1 montre à nouveau que cette primitive s'étend à $[-1,\infty)$.

(c) On fait le changement de variable $t^2 = x - 1,\ x = \varphi(t) := t^2 + 1$. On a que φ est un difféomorphisme de $(0, 1)$ sur $(1, 2)$, et de $(1, \infty)$ sur $(2, \infty)$, $\varphi'(t) = 2t > 0$ pour tout $t > 0$. L'intégrale auxiliaire est

$$\int \frac{2t^3}{t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t = 2\int \Big(t + 2 + \frac{3t-2}{t^2-2t+1}\Big)\,\mathrm{d}t = t^2 + 4t + 2\int \frac{3t-2}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= t^2 + 4t + 2\int \Big(\frac{3}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\Big)\,\mathrm{d}t = t^2 + 4t + 6\ln|t-1| - \frac{2}{t-1} + C.$$

En remarquant que l'intégrande est continu en $x = 1$ et en utilisant encore l'exercice 1, il vient :

$$\int \frac{x-1}{x - 2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x - 1 + 4\sqrt{x-1} + 6\ln|\sqrt{x-1} - 1| - \frac{2}{\sqrt{x-1}-1} + C_1, & x \in [1, 2), \\ x - 1 + 4\sqrt{x-1} + 6\ln|\sqrt{x-1} - 1| - \frac{2}{\sqrt{x-1}-1} + C_2, & x \in (2, \infty), \end{cases}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont deux constantes qui peuvent être différentes.

5. On fait le changement de variable $t = \tan(x/2),\ x = \varphi(t) := 2\arctan t$. On a que $\varphi : \mathbb{R} \to (-\pi, \pi)$ est un difféomorphisme, avec $\varphi'(t) = 2/(1+t^2) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, on a l'intégrale auxiliaire

$$\int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\Big(\frac{\sqrt{3}t}{3}\Big) + C.$$

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big) + C, \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$

On remarque que $1/(2+\cos x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Nous allons donc étendre la primitive obtenue à $\mathbb{R}$. Nous faisons le changement de variable $t = \psi(x) := \tan(x/2)$ sur chaque intervalle $I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\psi_k := \psi\big|_{I_k}$ est un difféomorphisme de I_k dans $\mathbb{R}$, d'inverse $x = \psi_k^{-1}(t) = 2\arctan t + 2k\pi$. On a alors $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big) + C_k, \quad \forall x \in I_k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Il s'agit maintenant de déterminer les constantes C_k pour assurer la continuité de la primitive au bornes des intervalles I_k. L'égalité des limites en $(2k+1)\pi^-$ et $(2k+1)\pi^+$ donne $C_{k+1} = C_k + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$, d'où $C_k = C_0 + 2k\frac{\sqrt{3}}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On obtient ainsi la famille de primitives sur tout $\mathbb{R}$, paramétrée par la constante $C_0 \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan(\frac{x}{2})) + C_0 + 2k\frac{\sqrt{3}}{3}\pi, & x \in I_k, \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(2k+1)\pi + C_0, & x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

6. (a) (i) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+k^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{(t/k)^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\arctan\Big(\frac{t}{k}\Big) + C\,;$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2-k^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{(t/k)^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k^2}\int \Big(\frac{1}{(t/k)-1} - \frac{1}{(t/k)+1}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k}\ln\Big|\frac{t-k}{t+k}\Big| + C.$

(b) On a $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x+b/2a)^2 - (b^2-4ac)/4a^2}\,\mathrm{d}x.$

— Si $b^2 - 4ac < 0$, on pose $k^2 = -(b^2-4ac)/4a^2$ et $t = x + b/2a$. On a alors la primitive auxiliaire $\frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2+k^2}\,\mathrm{d}t$ et on conclut en invoquant (a) (i).

— Si $b^2 - 4ac = 0$, le résultat est immédiat.

— Si $b^2 - 4ac > 0$, on pose $k^2 = (b^2-4ac)/4a^2$ et $t = x + b/2a$. On a alors la primitive auxiliaire $\frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2-k^2}\,\mathrm{d}t$ et on conclut en invoquant (a) (ii).

(c) Dans la pratique, on n'emploie pas les formules ci-dessus, mais la démarche y conduisant. Par exemple :

(i) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-5}$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+\frac{2}{\sqrt{6}}\int\left(\frac{1}{x-(1+\sqrt{6})}-\frac{1}{x-(1-\sqrt{6})}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+\frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C\,;$

(ii) $\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \ln|x^2+x+1| - 2\cdot\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]^2+1}$

$= \ln|x^2+x+1| - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\right)+C$ (en utilisant le changement de variable $t=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$).

7. (a) Tout d'abord, par l'exercice précédent,

$$I_1(t) = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C.$$

Pour calculer I_2, on écrit

$$I_2(t) = \frac{1}{a^4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(\frac{t^2}{a^2}+1)^2}$$

et on fait le changement de variable

$$z=\frac{t}{a},\quad t=az,\quad \mathrm{d}t=a\,\mathrm{d}z.$$

En intégrant par parties $\int\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \frac{1}{a^3}\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}\\
&= \frac{1}{a^3}\int\frac{z^2+1-z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{a^3}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{a^3}\int\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{a^3}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{a^3}\left[-\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right]\\
&= \frac{1}{2a^3}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2a^3}\frac{z}{z^2+1}\\
&= \frac{1}{2a^3}\int\frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{a} + \frac{1}{2a^3}\frac{\frac{t}{a}}{(\frac{t}{a})^2+1}\\
&= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}I_1(t)+\frac{t}{2(t^2+a^2)}\right].
\end{aligned}$$

(b) En suivant la même démarche on trouve, pour tout $n\geqslant 2$,

$$I_n(t) = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}(t)+\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right].$$