CORRIGÉ 12

1. (a) (i) En calculant les dérivées successives de f on obtient que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $k \geq 1$.
Comme f est C^∞ sur $(-1,\infty)$, la formule de Taylor donne : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout x dans un voisinage de zéro, il existe $\tilde{x}$ entre 0 et x tel que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\tilde{x})^{n+1}} x^{n+1}.$$

(ii) Posant $a_n = (-1)^{n-1}/n$, nous avons $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, d'où $R = 1$.
(iii) Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, nous avons donc $\tilde{x} \in [-\frac{1}{2}, 1]$ et nous obtenons bien la convergence uniforme

$$\Big|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\Big| \leq \frac{1}{n+1}\Big|\frac{x}{1+\tilde{x}}\Big|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

[Si $x > 0$, $0 < \tilde{x} < x \leq 1 \implies |\frac{x}{1+\tilde{x}}| \leq 1$; si $x < 0$, $-\frac{1}{2} \leq x < \tilde{x} \implies |x| \leq \frac{1}{2}$ & $|1+\tilde{x}| \geq \frac{1}{2} \implies |\frac{x}{1+\tilde{x}}| \leq 1$.]
(b) (i) Pour x dans un voisinage de zéro, la formule de Taylor donne

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\tilde{x})^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

(ii) Posant $a_n = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)/n!$, nous avons que

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\Big|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}\Big| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1,$$

d'où $R = 1$.
(iii) Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, nous avons $\tilde{x} \in [-\frac{1}{2}, 1]$ et donc, comme au point (a), $|\frac{x}{1+\tilde{x}}|^{n+1} \leq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\Big|(1+x)^\alpha - \Big(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k\Big)\Big| \\ &\qquad < \frac{|1+\tilde{x}|^\alpha |n-\alpha||(n-1)-\alpha|\dots|1-\alpha||\alpha|}{(n+1)\,n\,(n-1)\dots 1} \leq \frac{2^\alpha}{n+1}\Big|1-\frac{\alpha}{n}\Big|\Big|1-\frac{\alpha}{n-1}\Big|\dots|1-\alpha||\alpha|.\end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$ on a alors que $k \geq n_0 := [\alpha/2] + 1 \implies |1 - \alpha/k| \leq 1$. Donc, pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned}\frac{2^\alpha}{n+1}\Big|1-\frac{\alpha}{n}\Big|\dots|1-\alpha||\alpha| &= \frac{2^\alpha}{n+1}\Big|1-\frac{\alpha}{n}\Big|\dots\Big|1-\frac{\alpha}{n_0}\Big|\Big|1-\frac{\alpha}{n_0-1}\Big|\dots|1-\alpha||\alpha| \\ &\leq \frac{2^\alpha}{n+1}\Big|1-\frac{\alpha}{n_0}\Big|\Big|1-\frac{\alpha}{n_0-1}\Big|\dots|1-\alpha||\alpha| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \geq 1$, il existe un polynôme P_{3n} de degré $3n$ tel que $f^{(n)}(x) = P_{3n}(1/x)e^{-1/x^2}$ $\forall x \neq 0$.
En effet, $f'(x) = (2/x^3)e^{-1/x^2}$, donc le résultat est vrai pour $n = 1$.
Supposant que, pour un $n \geq 1$ donné, $f^{(n)}(x) = P_{3n}(1/x)e^{-1/x^2}$ $\forall x \neq 0$, il vient alors

$$f^{(n+1)}(x) = [P_{3n}'(1/x)(-1/x^2) + P_{3n}(1/x)(2/x^3)]e^{-1/x^2} \quad \forall x \neq 0,$$

et l'on vérifie aisément que l'expression entre crochets est un polynôme de degré $3n+3 = 3(n+1)$ en $1/x$. Le résultat est donc vrai pour tout $n \geq 1$.

Maintenant, comme l'exponentielle domine le polynôme, on a que $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Puisque f est continue en $x = 0$ et dérivable sur tout voisinage pointé de $x = 0$, avec $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, on déduit de l'exercice 8, série 9, que f est dérivable en $x = 0$, avec $f'(0) = 0$, et que f' est continue en $x = 0$. Par ailleurs, f' est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$, donc $f \in C^1(\mathbb{R})$. Supposons maintenant que $f^{(n)} \in C^0(\mathbb{R})$ pour un $n \geq 1$ donné. Utilisant $\lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$, le raisonnement précédent appliqué à $f^{(n)}$ montre que $f^{(n)} \in C^1(\mathbb{R})$, i.e. $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$. On conclut par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$.

Alors la formule de Taylor donne $f(x) = o(x^n)$ au voisinage de $x = 0$, pour tout $n \geq 1$.

Remarque : Utilisez un calculateur graphique pour voir à quel point f est “plate” autour de $x = 0$!

3. Par l'exercice 1 (a), $\ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

4. Par définition, $f(x) = e^{x\ln x}$, donc $D(f) = (0, \infty)$. Comme vu à l'exercice 9 (e), série 8, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Par ailleurs, on a clairement $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Comme f est continue, on sait donc déjà qu'elle doit avoir un minimum global. Vérifions ceci et complétons notre étude par le calcul des dérivées :

$$f'(x) = (e^{x\ln x})' = (\ln x + 1)e^{x\ln x}, \qquad f''(x) = [1/x + (\ln x + 1)^2]e^{x\ln x}.$$

On voit immédiatement que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc f est convexe sur $(0, \infty)$. D'autre part, $f'(x) = 0$ pour $x = e^{-1}$, avec $f' < 0$ à gauche de $x = e^{-1}$ et $f' > 0$ à droite de $x = e^{-1}$. Donc $x = e^{-1}$ est le point de minimum global recherché.

5. Les deux premières formules (“formules d'addition”) s'obtiennent directement en utilisant les définitions $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ et $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Nous démontrons maintenant la troisième en utilisant la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$:

$$\sinh(x) = 2\sinh(x/2)\cosh(x/2) = \frac{2\sinh(x/2)\cosh(x/2)}{1} = \frac{2\sinh(x/2)\cosh(x/2)}{\cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2)} = \frac{2\tanh(x/2)}{1 - \tanh^2(x/2)}.$$

6. L'équation proposée $\iff \sinh\frac{x}{2}\sinh x + \cosh\frac{x}{2}\cosh x = -\frac{7}{6}e^{-x/2}\sinh x \iff \cosh\frac{3x}{2} = -\frac{7}{6}e^{-x/2}\sinh x$

$$\iff e^{3x/2} + e^{-3x/2} = -\frac{7}{6}\big(e^{x/2} - e^{-3x/2}\big) \iff 6e^{3x} + 7e^{2x} - 1 = 0.$$

Posons $y = e^x > 0$. On a que $6y^3 + 7y^2 - 1 = 0 \iff (y+1)(3y-1)(2y+1) = 0$ ($y = -1$ racine évidente conduit à cette factorisation). Ainsi, $y = 1/3 > 0$ seule solution possible, d'où l'unique solution $x = -\ln 3$.

7. Posons $y = \operatorname{argtanh}(x)$, $x = \tanh(y) \in (-1, 1)$ et $u = e^y > 0$. On a alors

$$x = \frac{u - 1/u}{u + 1/u} \iff u^2(x-1) + (x+1) = 0 \iff u^2 = \frac{1+x}{1-x} \iff u = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \iff y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Une autre méthode consiste à montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\operatorname{argtanh}(x) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Big) = 0$ pour tout $-1 < x < 1$ et que $\operatorname{argtanh}(x) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0$ en $x = 0$.

8. (a) $\arcsin(\tanh x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x}$ (car $\cosh x > 0$), $\quad \forall x \in \mathbb{R}$;

(b) $\operatorname{argtanh}(\tan x)' = \frac{1}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}, \quad \forall x \in (-\pi/4, \pi/4)$;

(c) $\Big((2x^2+1)\operatorname{argsinh} x - x\sqrt{1+x^2}\Big)' = \cdots = 4x\operatorname{argsinh} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

9. Nous utiliserons les D.L. $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sinh(x) = x + o(x^2)$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $(x \to 0)$.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x + 2^x)}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \ln(2)2^x}{x + 2^x} = \ln(2) \implies \lim_{x\to\infty} (x + 2^x)^x = \lim_{x\to\infty} \exp(x\ln(x + 2^x)) = 2.$

$$\text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argtanh} x - \arctan x}{\sinh x - \sin x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}}{\cosh x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)(\cosh x - \cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)(x^2 + o(x^2))} = 2.$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to 0^+} \sinh x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sinh x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\cosh x/\sinh^2 x}$$
$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cosh x} \cdot \frac{x^2 + o(x^2)}{x} = 0 \implies \lim_{x\to 0^+} x^{\sinh x} \lim_{x\to 0^+} e^{\sinh x \ln x} = 1.$$