

CORRIGÉ 11

1. (a)–(b) On calcule les quatre premières dérivées de $f(x) = \arcsin(x)$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}; \quad f^{(2)}(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}; \quad f^{(3)}(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}};$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}}; \quad f^{(5)}(x) = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{9/2}}.$$

La formule de Taylor donne alors

$$f(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right).$$

(c)–(d) Clairement $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ est son propre D.L. autour de $a = 0$ (avec reste nul). Autour de $a = 1$, on a $f(x) = 1 + 2(x-1) + 5(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$ (avec reste nul).

(e) Comme $1/\sqrt{1-x^2} = \arcsin'(x)$, le D.L. recherché peut se calculer en dérivant terme à terme le D.L. du point (a), d'où $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.

(f) On pose $x = 1+h$ et on cherche le D.L. de $f(1+h)$ autour de $h = 0$. On utilise pour ceci les D.L. connus $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4 + o(h^4)$ et $1/(1+h) = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)$, d'où

$$f(1+h) = \left(h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4 + o(h^4)\right)\left(1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)\right)^2$$

$$= h - \frac{5}{2}h^2 + \frac{13}{3}h^3 - \frac{77}{12}h^4 + o(h^4) = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4).$$

(g) On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$, ce qui donne, en utilisant $\tan h = h + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$ et $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$,

$$\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = (1 + \tan h)(1 + \tan h + \tan^2 h + \tan^3 h + o(\tan^3 h))$$

$$= 1 + 2 \tan h + 2 \tan^2 h + 2 \tan^3 h + o(\tan^3 h) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + o(h^3)$$

$$\implies \sqrt{\tan(x)} = \sqrt{1 + (2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + o(h^3))}$$

$$= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o(h^3) = 1 + (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{5}{6}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o((x - \frac{\pi}{4})^3).$$

2. On utilise pour calculer ces limites les D.L. usuels, et ceux obtenus ci-dessus et dans la série précédente :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) - (1 - x^2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{3}{2};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))}{x^5} = -\frac{1}{120};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \arcsin(x) - 6x - x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)) - 6x - x^3}{x^5} = \frac{9}{20};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin^2(x)}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)) - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))^2}{x^6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} + o(x^6) - (x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + o(x^6))}{x^6} = \frac{1}{10} - \frac{1}{36} - \frac{1}{60};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x + \frac{x^2}{2}) + x - (1 - \frac{x^2}{2}) - 2x + o(x^2)}{x - (x - \frac{x^2}{2})} = 2.$$

3. Le résultat découle immédiatement de l'inégalité

$$\sup_E |(\alpha f_n + \beta g_n) - (\alpha f + \beta g)| \leq |\alpha| \sup_E |f_n - f| + |\beta| \sup_E |g_n - g|.$$

4. Supposons que (f_n) est uniformément de Cauchy. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in E. \quad (1)$$

En particulier, pour chaque $x \in E$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} . Par complétude de \mathbb{R} , elle est donc convergente. Posons $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, pour tout $x \in E$. Ceci définit une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. En laissant $m \rightarrow \infty$ dans (1), on a alors

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall x \in E,$$

ce qui montre que $f_n \xrightarrow{U} f$.

Réciproquement, supposons $f_n \xrightarrow{U} f$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in E.$$

Ainsi,

$$n, m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in E,$$

ce qui montre que (f_n) est uniformément de Cauchy. \square

5. Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a que $f_n(x) \rightarrow f(x) := \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 0, \\ x & \text{pour } x \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$

Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([0, \infty), \mathbb{R})$ et f est discontinue en 0, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, \infty)$.

Considérons maintenant les fonctions $g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = \frac{|1-x|}{nx+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

On a alors $g'_n(x) = -\frac{1+n}{(nx+1)^2} < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ et $g'_n(x) = \frac{1+n}{(nx+1)^2} > 0 \quad \forall x \in (1, \infty)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est positive, décroît de $g_n(0) = 1$ à $g_n(1) = 0$, puis est strictement croissante sur $(1, \infty)$, avec $\lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = 1/n$. Alors $\sup_{(0, \infty)} |f_n - f| = \sup_{(0, \infty)} g_n = 1$ et la convergence n'est pas uniforme sur $(0, \infty)$. En revanche, $\sup_{[1, \infty)} |f_n - f| = \sup_{[1, \infty)} g_n = 1/n$, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[1, \infty)$.

6. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de f_n est donnée par $f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(nx^2+1)^2}$, $x \in [-1, 1]$.

Ainsi, $|f_n|$ atteint son maximum en $x_n = \pm 1/\sqrt{n}$, avec $\max |f_n| = 1/2\sqrt{n} \rightarrow 0$, d'où $f_n \xrightarrow{U} 0$ quand $n \rightarrow \infty$. D'autre part, (f'_n) converge ponctuellement vers la fonction $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ si $x \neq 0$, $g(0) = 1$. Ainsi, $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$. On constate que la fonction limite g n'est pas continue en $x = 0$, et l'on conclut que (f'_n) ne converge pas uniformément vers g .

7. On constate tout d'abord que, pour $x \in [0, 1)$, $|f_n(x)| \leq nx^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Puisque $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on conclut que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers $f \equiv 0$. Par ailleurs, une étude de fonction sommaire montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n atteint son maximum sur $[0, 1]$ au point $x_n = \frac{n}{n+1}$.

Ainsi,

$$\max_{[0, 1]} |f_n - f| = f\left(\frac{n}{n+1}\right) = n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty),$$

donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

En revanche, pour $c \in (0, 1)$ fixé on constate que, pour n assez grand, $x_n > c$, donc le point de maximum de f_n est en dehors de l'intervalle $[0, c]$. Puisque f_n est croissante sur $[0, x_n]$, on conclut que $\max_{[0, c]} |f_n - f| = f_n(c) = nc^n(1-c) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, c]$.