

CORRIGÉ 10

1. D'après un principe bien connu en analyse, "quand on ne sait pas quoi faire, on prend une dérivée" :

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+1/x^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0, \quad \forall x > 0.$$

Donc la fonction continue $\arctan(x) + \arctan(1/x) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est constante, d'où le résultat.

2. (a) Utilisant le résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{3}$ de la série précédente, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cotan^2(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x)(\tan x + x)}{x^2 \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\tan x} \right)^2 \cdot \frac{\tan x - x}{x^3} \cdot \frac{\tan x + x}{x} = \frac{2}{3}.$$

(b) Notant que, pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$, le changement de variable $y = 1/x$ donne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\alpha} - e \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+\alpha} - e \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha} - e \right] \\ &\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{d}{dy} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha} - e \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{1}{y^2} \right) \ln(1+y) + \left(\frac{1}{y} + \alpha \right) \frac{1}{1+y} \right] (1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1+\alpha y}{y+y^2} - \frac{\ln(1+y)}{y^2} \right] (1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y+\alpha y^2 - (1+y)\ln(1+y)}{y^2+y^3} \right] (1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y+\alpha y^2 - (1+y)\ln(1+y)}{y^2+y^3} \right] \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{2\alpha y - \ln(1+y)}{2y+3y^2} \right] \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{2\alpha - 1/(1+y)}{2+6y} \right] = \alpha - \frac{1}{2}$$

et $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} (1+y)^\alpha = e$, d'où finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\alpha} - e \right] = \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) e.$$

3. (a) On a

$$f'_\alpha(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x+\alpha}{x^2+x} \quad \text{et} \quad f''_\alpha(x) = \frac{(2\alpha-1)x+\alpha}{(x^2+x)^2}.$$

Si $\alpha \leq \frac{1}{3}$, on a que $f''_\alpha(x) \leq \frac{1-x}{3(x^2+x)^2} < 0$ pour tout $x \in (1, \infty)$, donc f'_α est strictement décroissante sur $(1, \infty)$. Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} f'_\alpha(x) = 0$, on a alors $f'_\alpha > 0$ sur $(1, \infty)$, donc f_α est strictement croissante.

Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, on a que $f''_\alpha(x) \geq \frac{1}{2(x^2+x)^2} > 0$ pour tout $x \in (1, \infty)$, donc f'_α est strictement croissante sur $(1, \infty)$. Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} f'_\alpha(x) = 0$, on a que $f'_\alpha < 0$ sur $[1, \infty)$, donc f_α est strictement décroissante.

(b) Puisque la fonction $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, on déduit du point précédent que la fonction $(1, \infty) \ni x \mapsto (1+1/x)^{x+\alpha}$ est strictement croissante si $\alpha \leq \frac{1}{3}$ et strictement décroissante si $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Par ailleurs, on déduit du point (b) de l'exercice 1 que $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(\alpha) = e$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, $(e_n(\frac{1}{3}))_{n \geq 1}$ est strictement croissante et converge vers e , alors que $(e_n(\frac{2}{3}))_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et converge vers e , d'où les inégalités proposées.

4. (a) Tout d'abord, par la deuxième inégalité démontrée à l'exercice 3 (b) et la monotonie de $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, on a que

$$y_n = \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On montre maintenant que $\sum_{n \geq 1} y_n$ est convergente en la comparant avec $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) \ln(1+y) - 1}{y^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{y}{2}) \ln(1 + y) - y}{y^3} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln(1 + y) + (1 + \frac{y}{2}) \frac{1}{1+y} - 1}{3y^2} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2(1+y)} + \frac{1}{2(1+y)} + (1 + \frac{y}{2}) (\frac{-1}{(1+y)^2})}{6y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + y - 1 - \frac{y}{2}}{6y(1 + y)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{12(1 + y)^2} = \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\sum_{n \geq 1} y_n$ et $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ ont même nature, d'où la convergence de $\sum_{n \geq 1} y_n$.

(b) Puisque $\sum_{n \geq 1} y_n > 0$, on a alors, par la continuité de la fonction exponentielle,

$$\sum_{k=1}^{n-1} y_k = \ln(x_n) - \ln(x_1) = \ln(x_n) + 1 \implies \ell := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k - 1\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k - 1\right) > e^{-1}.$$

5. Puisque $|\sin(1/x^2)| \leq 1$, on a que $x^3 \sin(1/x^2) \rightarrow 0$, et donc $e^{x^3 \sin(1/x^2)} \rightarrow 1$, lorsque $x \rightarrow 0$, par la continuité de la fonction exponentielle. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ est bien une forme indéterminée du type "0/0". Maintenant, posant $f(x) = e^{x^3 \sin(1/x^2)} - 1$ et $g(x) = x$, on constate que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} [3x^2 \sin(1/x^2) - 2 \cos(1/x^2)] e^{x^3 \sin(1/x^2)}$$

n'existe pas. (Lorsque $x \rightarrow 0$, le premier terme tend vers zéro, le second oscille arbitrairement vite.)

Comme $e^t = 1 + t + o(t)$ lorsque $t \rightarrow 0$, nous avons pourtant

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin(1/x^2) + o(x^3 \sin(1/x^2))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x^2) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3 \sin(1/x^2))}{x^3 \sin(1/x^2)} \cdot \frac{x^3 \sin(1/x^2)}{x} = 0.$$

6. On utilise les D.L. des fonctions usuelles autour de $x = 0$ et la division euclidienne des polynômes.

$$\text{(a)} \quad (\cos x)^2 = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))^2 = 1 - x^2 + o(x^3); \quad \text{(b)} \quad (\sin x)^3 = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5);$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5); \quad \text{(d)} \quad \frac{\ln(1+x)}{e^x + 1} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

$$\begin{aligned}
\text{(e)} \quad & \sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))^3 + \frac{1}{120}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))^5 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(f)} \quad & \sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + \frac{1}{2}(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - \frac{1}{8}(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))^2 + \frac{3}{48}(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))^3] = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3\sqrt{2}} + o(x^3).
\end{aligned}$$

7. Tout d'abord, f est C^1 sur \mathbb{R}^* comme composée de fonction C^1 , avec $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, $\forall x \neq 0$. Par ailleurs, f est continue en $x = 0$, et on a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{2x} = 0.$$

Ainsi, par l'exercice 8 de la série 9, f est dérivable en $x = 0$, avec $f'(0) = 0$, et on conclut que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Les extrema de f sont à chercher parmi les points critiques, solutions de $f'(x) = 0$. Nous restreignons dès maintenant l'étude de f à la demi-droite positive car f est paire. On montre aisément que $f(x) < 1$ pour tout $x > 0$, donc $x = 0$ est un point de maximum global.

Les autres points critiques sont toutes les solutions non nulles de l'équation $\tan(x) = x$. On peut résoudre cette équation graphiquement et on trouve une suite de zéros $(x_n)_{n \geq 1}$, avec $x_n \in (n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$, et telle que $|x_n - (n + \frac{1}{2})\pi| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On a donc $\text{sgn } f'(x_n) = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$. Puisque les nombres $(x_n)_{n \geq 1}$ sont tous les zéros de f' sur $(0, \infty)$, f' a un signe constant entre deux points successifs de la suite, et l'on conclut que x_n est un point de minimum (respectivement maximum) local si n est impair (resp. pair).

La nature de ces extrema peut également être déterminée par le signe de la dérivée seconde. En effet, f est C^2 sur $(0, \infty)$ avec

$$f''(x) = \frac{2 \sin x - 2x \cos x - x^2 \sin x}{x^3}, \quad x > 0.$$

On remarque que $f'(x) = 0 \implies f''(x) = -f(x)$. Ainsi $f''(x_n) = (-1)^{n+1}$, ce qui confirme le résultat ci-dessus.