

**9.1.** Relisez attentivement la preuve du théorème sur les permutations de séries absolument convergentes.

Si l'on suppose seulement que la série converge, à quel endroit exactement la preuve devient-elle fautive? Analysez attentivement chaque étape et chaque affirmation de la preuve sous cette hypothèse trop faible, pour voir ce qui reste vrai et ce qui devient faux. Vérifiez sur le cas de la série harmonique alternée.

Soit à présent  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  une série qui converge mais ne converge pas absolument.

Définissons comme au cours  $x_n^+ = \max\{0, x_n\}$  et  $x_n^- = \min\{0, x_n\}$ ; noter  $x_n = x_n^+ + x_n^-$ .

Démontrer  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ = +\infty$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^- = -\infty$ .

**9.2.** À rendre. Déterminez si la série donnée converge ou diverge :

$$i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n} \quad ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} \quad iii) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2+7} - n)$$

**9.3.** Étudiez la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1} \right).$$

**9.4.** Calculez

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

Indication: devinez vous-même une indication en regardant la méthode de l'exercice 8.2 du 2 octobre 2025 et/ou la convergence de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  vue en classe.