8.1. Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels. Montrez que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

est une série convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente.

8.2. On définit[1] le nombre $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
Trouvez trois constantes α, β et μ de sorte que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

Déduisez-en la somme de la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

8.3. Soient $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ deux suites de nombres réels positifs pour lesquelles il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Montrez que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty.$$

<u>Indication:</u> montrez que pour tout $n > n_0$ on a $a_n \leq \beta b_n$, où $\beta = \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$.

[1] Notez que la formule de l'exercice 4.3 du 18 septembre 2025 est différente; on peut effectivement démontrer que cette dernière converge vers le nombre d'Euler e définit comme ci-dessus.