7.1. (i) Montrez que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ donnée par $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$ est de Cauchy.

(ii) Montrez que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ n'est pas de Cauchy.

(iii) Montrez que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée récursivement par $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}$, $n \geq 0,\ x_0 = 1$ est de Cauchy et calculez sa limite.

(iv) On considère la suite donnée par $8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, \ldots$. Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite?

7.2. À rendre[1]. Soit $x_n = \sqrt[n]{n}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Démontrez que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Indication: Démontrez d'abord que $\forall \delta > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\delta)^n} = 0$.

[1]Pour cet exercice, on admet que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$ il existe $y > 0$ avec $y^n = x$; on définit $\sqrt[n]{x} = y$. Un résultat bien plus fort sera prouvé en cours.