**Définition.** On dit que $x \in \mathbf{R}$ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ si de celle-ci on peut extraire une sous-suite qui converge vers $x$.

**6.1**. À rendre: soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite bornée et désignons par $E$ l'ensemble de ses points d'accumulation. Montrez que

$$\sup E = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Indications:

1.) Montrez que $E \neq \varnothing$.
2.) Si $\alpha = \sup E, \beta = \limsup_{n\to\infty} x_n$, montrez que $\beta \leq \alpha$.
3.) Soit $\lambda \in E$, limite de la sous-suite $(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$; montrez que $\beta \geq \lambda$.

**6.2**. On considère la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par

$$x_0 = 0, \qquad x_{\frac{q(q-1)}{2}+p} = \frac{p}{q},$$

pour $1 \leq p \leq q, \quad q = 1, 2, \ldots$.

Réfléchissez pourquoi ceci est une définition correcte: a-t-on bien défini $x_n$ pour tout $n$, et de façon non ambiguë?

(a) Écrivez les 16 premiers termes de cette suite; on peut deviner le motif.

(b) Déterminez (avec preuve, bien sûr) tous les points d'accumulation de cette suite.