4.1. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs qui est <u>sous-additive</u>, ce qui signifie par définition que:

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m, \qquad \forall m, n \in \mathbf{N}.$$

Démontrez que la suite $(x_n/n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

Attention: donnez un exemple qui montre que $(x_n/n)_{n=1}^{\infty}$ n'est en général pas monotone!

4.2. Démontrez la formule du <u>binôme de Newton</u>:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ et tout entier $n \geq 1$. On rappelle que $n!$ est défini par $0! = 1$ et $n! = n(n-1)!$ pour $n \geq 1$.

Indication: on peut procéder par récurrence.

4.3. On définit $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrez que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est convergente et que $\lim_{n\to\infty} x_n > 2$.

(Le nombre $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est important en analyse; c'est le <u>nombre d'Euler</u> e).

Indications:

(a) En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrez que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(b) Sachant que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 2$ (pourquoi?), en déduire que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

(c) En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrez que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante.