3.1. À rendre: Soit $a > 0$; montrez qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^2 = a$.

3.2. La suite de Fibonacci est définie en posant $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ puis en postulant que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$. On peut donc calculer les premiers termes:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711,$
$28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, \ldots$

On constate que cette suite explose rapidement! Démontrez par récurrence la formule exacte

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Cette suite est omniprésente dans la nature; vous trouverez quelques informations intéressantes sur Wikipedia ... mais ne lisez pas l'article avant d'avoir honnêtement essayé de résoudre l'exercice!

3.3. Démontrez très soigneusement les faits suivants. Mentionnez chaque fait que vous utilisez (p. ex. la propriété archimédienne, etc).

- $\forall\, x, y \in \mathbf{R} : x + 1 < y \Rightarrow \exists\, n \in \mathbf{Z} : x < n < y.$
- $\forall\, x \in \exists!\, n \in \mathbf{Z} : x \in [n, n+1).$

C'est cet unique entier n qui définit la <u>partie entière</u> $[x]$ de x.