

**2.1.** Prouver scrupuleusement les énoncés suivants pour tous  $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ .

- (a)  $-(-x) = x$
- (b)  $(-x)(-y) = xy$
- (c)  $-(x + y) = -x - y$
- (d) Si  $x \leq y$  et  $z \leq t$  alors  $x + z \leq y + t$
- (e)  $x^2 \geq 0$
- (f)  $|xy| = |x| \cdot |y|$

**2.2.** Pour chacun des ensembles suivants, indiquer s'il est majoré, minoré, borné. S'il est majoré, donner son supremum. S'il est minoré, donner son infimum. Justifier votre réponse.

- 1.)  $\{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ ,
- 2.)  $\{x \in \mathbf{Q} : 0 < x < 1\}$ ,
- 3.)  $\{x_n = (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$ ,
- 4.)  $\{x \in \mathbf{Q} : x < \sqrt{2}\}$ ,
- 5.)  $\{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\}$ ,
- 6.)  $\{x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbf{N}^*\}$ .

**2.3.** (a) Démontrer que les entiers modulo 4 ne forment pas un corps.  
(b) Trouver malgré tout un corps qui a exactement quatre éléments:  $0, 1, x, y$ .

**Indication:** Réfléchissez à la multiplication d'abord, à l'addition ensuite.

Que vaut  $1+1$ ? (oui, sérieusement!)