24.1. À rendre. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ la fonction par $f(x) = 1/b$ si x est s'écrit comme fraction réduite $x = a/b$ pour des entiers $a, b \geq 1$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrez que f est intégrable.

24.2. Trouvez l'aire du domaine $\{(x, y) : 0 < x < 1, x^2 < y < x\}$.

24.3. Soit $g \geq 0$ une fonction continue sur $[a, b]$ avec $\int_a^b g = 0$. Montrez que $g = 0$.
Qu'en est-il si g est seulement supposée intégrable?

24.4. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Démontrez $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(En utilisant les sommes de Darboux: le théorème fondamental nécessiterait la continuité.)

24.5. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec g positive. Montrez qu'il existe c dans $[a, b]$ avec

$$\int_a^b (f \cdot g) = f(c) \int_a^b g.$$

(Vérifiez que le Théorème de la Moyenne est un cas particulier de cet énoncé.)