23.1. Relisez la preuve du théorème d'Abel donnée au cours et cherchez s'il y a un point que vous n'avez pas compris.

En particulier, assurez-vous d'avoir compris les transitions vers $R = 1$ et vers $f(1) = 0$, ainsi que la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ (pour x fixé avec $|x| < 1$).

23.2. *Dans cette exercice, on admet qu'on connaît déjà* π *et sa relation avec les fonctions* sin *et* cos. *Une définition de* π *consiste à démontrer que la fonction* sin *est périodique, et de prendre la moitié de cette période. Avec cette définition, on peut démontrer que* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ *et donc* $\mathrm{tg}(\pi/4) = 1$.

Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Trouvez son rayon de convergence R et montrez que, sur l'intervalle $]-R, R[$, c'est une inverse à la fonction tg, qu'on notera Arctg.

Démontrez, grâce au Théorème d'Abel, que

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi.$$

Remarque: cette série est très inefficace pour calculer π. *Par exemple, si on somme les* 1000 *premiers termes(!!), on trouve une réponse qui commence par* 3,14259... *et donc n'est même pas correcte à la troisième décimale. Un autre désagrément est que la série ne converge pas absolument.*

23.3. À rendre. En partant des définitions de l'intégration, calculez l'intégrale $\int_0^b x^2 \, dx$.

Indication: que vaut $\sum_{i=1}^{n} i^2$ *?*