22.1. Trouvez le rayon de convergence et une formule simple pour la fonction définie par cette série entière:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Pour trouver une formule, vous pouvez permuter la dérivée avec la somme infinie en utilisant un théorème du cours. Assurez-vous de bien démontrer ce que vous affirmez plutôt que de faire des manipulations formelles...

Vous pouvez aussi essayer de trouver une autre preuve “low-tech”.

22.2. Considérez la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence, que l'on suppose > 0. Démontrer qu'il existe des fonctions F sur $]-R, R[$ qui sont dérivables et avec $F' = f$.

22.3. Prouvez qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel $\cos \neq 0$. On définit $\mathrm{tg} = \dfrac{\sin}{\cos}$ sur ce voisinage.

Prouvez que tg est croissante sur ce voisinage.

22.4. Trouvez le rayon de convergence et une expression simple de la fonction définie par la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.